

Woher kommt die Rakete?

Auslöser für diese Überlegungen ist das aktuell letzte Buch von Robert Harris ‚Vergeltung‘. Darin geht es um den Einsatz der V2 Rakete im 2. Weltkrieg.

Gegen Ende 1944 war die durch Wernher von Braun vorangetriebene Entwicklung der V2 Rakete so weit vorangeschritten, dass sie im Krieg gegen England eingesetzt wurde, um London zu bombardieren. Die Reichweite der Rakete betrug ca. 500 km, sodass sie vom damals noch besetzten Holland aus gestartet werden konnte, um Ziele in England zu erreichen. Der Schaden, den sie anrichtete, war beträchtlich und die Engländer mussten unbedingt die Abschusspositionen der Raketen herausfinden, um diese Bombardieren zu können. Da die Rakete eine Geschwindigkeit von 5000 km pro Stunde erreichen konnte, war es unmöglich, die Flugbahn zu verfolgen. Man konnte lediglich anhand des Einschlagortes und einiger vom Radar gemessenen Punkte etwas über die Flugbahn ermitteln. Um aus diesen wenigen Informationen den Abschussort zu berechnen, wurden, ähnlich wie schon bei der Dechiffrierung der verschlüsselten Nachrichten der deutschen U-Boote, Frauen mit mathematischen Fähigkeiten eingesetzt, die innerhalb von wenigen Minuten nach dem Einschlag einer Rakete den genauen Standort der Abschussbasis berechnen sollten.

Auf jeden Fall inspirierte mich diese Geschichte dazu, mir Gedanken darüber zu machen, wie in der Mathematik und Physik die Flugbahnen von Wurfgeschossen, Kanonenkugeln oder Raketen berechnet werden. Dabei soll wieder die Schulmathematik als Wissensgrundlage genügen.

Treffen wir zunächst ein paar Annahmen:

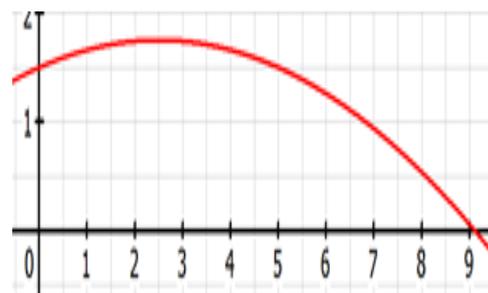
In der Analysis sind wir es gewohnt in zweidimensionalen Ebenen mit einer x-Achse und einer y-Achse zu denken. In der Realität finden Flugbahnen aber im dreidimensionalen Raum statt. Wir müssten theoretisch noch eine z-Achse für die dritte Dimension berücksichtigen. Wenn allerdings keine seitlichen Abweichungen der Flugbahn beispielsweise durch Seitenwind berücksichtigt wird, kann die Flugbahn in einer Ebene gezeichnet werden und wir können die dritte Dimension außer Acht lassen. Eine realistische Flugbahn wird durch die Abwurf- oder Abschussgeschwindigkeit und den Abwurfwinkel bestimmt. Außerdem beeinflussen Masse und Querschnitt des Flugkörpers den Luftwiderstand. Dadurch werden die Berechnungen wesentlich komplizierter. Raketen haben einen Antrieb, der die Rakete auch nach dem Abschuss noch weiter beschleunigt. Durch die Verbrennung des Treibstoffes wird die Rakete im Zeitablauf leichter. Diese Faktoren beeinflussen ebenfalls die Flugbahn.

1. Die Wurfparabel

In der Mittelstufe lernt man als Beispiel für quadratische Funktionen die Wurfparabel kennen. Wenn man einen Ball wirft oder eine Kugel stößt, so fliegt der Gegenstand in Form einer Parabel, deren Form sich durch eine quadratische Funktion darstellen lässt. Dieses wird in der Physik auch als schräger oder schiefer Wurf bezeichnet. Damit lassen sich etwa solche Aufgaben stellen:

Thomas stößt bei den Bundesjugendspielen die Kugel, deren Flugbahn die Gleichung $f(x) = -0,0654x^2 + 0,57735x + 1,5$ hat.

- Wie weit fliegt die Kugel, wenn der Abstoßpunkt bei $x = 0$ liegt?
- In welcher Höhe wird die Kugel abgestoßen?
- Wo liegt der Scheitelpunkt der Flugkurve?



d) Wie groß ist der Winkel, in dem die Kugel abgestoßen wird?

Leider wird hier meist vergeblich versucht, Schüler durch solche angeblich praxisnahen Anwendungsaufgaben zu motivieren. Was allerdings auch kein Wunder ist, denn welcher Sportler hat jemals die Flugkurve seines Sportgerätes als Funktionsgleichung 2. Grades betrachtet. Noch frustrierender wird es, wenn die Aufgabe gestellt wird, aus drei gemessenen Punkten der Flugkurve, die Gleichung der Parabel aufzustellen.

Für die Lehrkraft allerdings bietet eine solche Aufgabe alles, was man im Zusammenhang mit quadratischen Funktionen berechnen kann. Der Abwurfwinkel allerdings ist dann eher erst in der Oberstufe mithilfe der 1. Ableitung zu lösen.

Die wirklich sinnvolle Fragestellung allerdings lässt sich mit der Gleichung der Wurfparabel allerdings nicht beantworten: **Wie kann Thomas seine Leistung im Kugelstoßen verbessern?** (seine aktuelle Leistung liegt bei 10,93 m als Lösung der 2. Nullstelle der obigen Gleichung)

Dazu benötigen wir die beiden Parameter, die die Wurffleistung im Wesentlichen beeinflussen: Die **Abwurfgeschwindigkeit** und den **Abwurfwinkel**.

Die Abwurfgeschwindigkeit in der Physik als v_0 bezeichnet, wird in Meter pro Sekunde gemessen. Diese kann durch Technik und Krafttraining verbessert werden. Der Abwurfwinkel allerdings kann bereits durch kleinere Korrekturen verändert werden. Die Frage ist dann, **welches ist der Abwurfwinkel, der die beste Weite bringt?**

Dazu gibt es in der Physik zwei wichtige Gleichungen, die uns weiterhelfen:

Die Bahngleichung für den Wurf als Funktion 2. Grades

$$f(x) = y_0 + \tan(\alpha) x - \frac{g}{v_0^2 (\cos(\alpha))^2} x^2$$

und die Formel für die Wurfweite für $Y = 0$

$$\text{Weite } x = \frac{v_0^2}{g} \sin(2 \alpha)$$

Erläuterung: y_0 = Die Abwurfhöhe

g = Erdbeschleunigungskonstante = 9,81 m/sec

(d.h. pro Sekunde nimmt die Geschwindigkeit eines fallenden Körpers um 9,81 m zu.)

Die Weitenformel gilt nur, wenn die Abwurfhöhe gleich der Auftreffhöhe ist.

Der optimale Abwurfwinkel muss danach bei 45 Grad liegen, da die rechte Seite der Gleichung den größten Wert dann hat, wenn bei Konstanz von v_0 und g der Winkel $\alpha = 45$ Grad ist, da der Sinus nicht größer als 1 sein kann ($\sin(2 * 45) = 1$).

Berechnet man dann durch Verschiebung der Parabel den Winkel an der Abwurfposition, so ergibt sich ein Winkel der kleiner ist als 45 Grad.

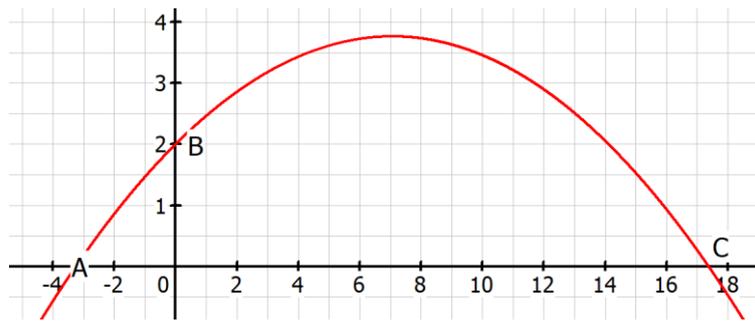
Beispielaufgabe:

Ein talentierter Kugelstoßer stößt die Kugel bei einer Abwurfgeschwindigkeit von 14m/sec 18 m weit. Um wieviel Meter könnte er durch Verbesserung des Abwurfwinkels weiter stoßen?

Die Aufgabe ist so nicht eindeutig zu lösen, da die obige Formel für die Weite nur gilt, wenn die Abwurfhöhe = 0 ist.



Beim Kugelstoßen müssen wir aber davon ausgehen, dass die Kugel oder der Ball die Hand in einer Höhe von über 2 m die Hand verlässt. Im Beispiel soll diese bei 2 m liegen.



Die Abwurfgeschwindigkeit sowie der Abwurfwinkel sollen für den Punkt B gelten. Für die Bahngleichung gelten allerdings diese Größen für den Punkt A. Ebenso gelten die Angaben im Punkt A für die Wurfweitengleichung.

Man weiß zwar, dass der optimale Winkel bei 45 Grad liegt. Dieses gilt aber für den Punkt A, im Punkt B ist der Winkel kleiner. Die rechnerische Lösung dafür ist nicht so einfach, da es immer zwei Unbekannte in der Gleichung gibt.

Numerische Lösungen würden hier zu einem Ergebnis führen, zum Glück gibt es aber zwei Formeln, die die Abwurfhöhe berücksichtigen:

Für den optimalen Winkel im Punkt B gilt:

$$\cos(2 \alpha) = \frac{gh}{v_0^2 + gh}$$

Für die Weite ab dem Punkt B gilt:

$$\text{Weite } x = \frac{v_0^2}{g} \cos \alpha \left(\sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha + \frac{2gh}{v_0^2}} \right)$$

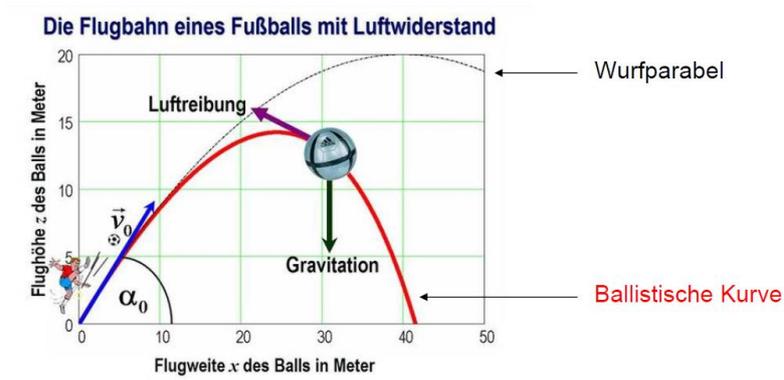
Das ergibt als Lösungen für die Beispielaufgabe: Bei einem Winkel von **42,39 Grad** kann eine Weite von **21,89 Metern** erreicht werden.

(In der Praxis liegt der optimale Winkel allerdings aufgrund anderer Faktoren noch etwas niedriger)

2. Flugkurve mit Berücksichtigung des Luftwiderstandes

Betrachten wir die Flugkurve eines Fußballs beim Abstoß. Nehmen wir an, der Ball wird im optimalen Winkel von 45 Grad mit einer Geschwindigkeit von $v_0 = 30 \text{ m/sec}$ abgeschossen. Dann würde der Ball ca. 91,7 Meter weit fliegen. Da $\sin(2 \cdot 45) = 1$ ist, genügt es $30^2/9,81$ zu berechnen. In Wahrheit beschreibt die Flugkurve des Balles aber keine symmetrische Parabel, sondern eine sog. **ballistische Kurve**.





Die ballistische Kurve zeichnet sich dadurch aus, dass der rechte Ast der Parabel bedingt durch den Luftwiderstand schneller nach unten verläuft als bei einer symmetrischen Parabel. Der Verlauf ist **rechtssteil**. Der Luftwiderstand wird bestimmt durch die Masse und den sog. Reibungskoeffizient, der eine Maßzahl aus Querschnitt und Oberflächenbeschaffenheit ist.

Bei einem Fußball ist der Luftwiderstand relativ hoch und damit der Verlauf der Flugkurve sehr rechtssteil, bei einer Kugelstoßkugel oder gar einer Gewehrpatrone sehr gering und damit ähnelt die Flugkurve stark einer Wurfparabel.

Generell kann man sagen, dass der Luftwiderstand umso stärker wirkt, je größer der Abschusswinkel ist, da dadurch der Ball höher steigt ist er auch länger in der Luft und fliegt dadurch weniger weit als bei geringerem Abschusswinkel. Der optimale Winkel liegt demnach deutlich unter 45 Grad.

Man kann die Flugkurve unter Berücksichtigung des Luftwiderstands auch mathematisch ausrechnen. Die Formel dafür ist allerdings wesentlich komplizierter als für die normale Flugparabel ohne Luftwiderstand.

Für $v_0 = 30 \text{ m/sec}$, $\alpha = 45 \text{ Grad}$ $m = 450 \text{ g}$
 $\beta = 0,142 \text{ m/sec}$ Luftwiderstandskoeffizient

$$x_{\text{höchst}} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin(2\alpha_0)}{g + \frac{\beta v_0 \sin \alpha_0}{m}}$$

Ergibt sich eine Weite von ca. 45 m. Das ist etwa die Hälfte der Weite, die sich ohne Luftwiderstand ergibt. (siehe Schaubild oben).

Bei einem geringeren Abschusswinkel ergibt sich eine größere Weite .

Die Berechnung von ballistischen Flugkurven ist äußerst komplex und soll daher nicht vertieft werden.

3. Flugbahn von Raketen

Der Flug einer Rakete verläuft ebenfalls nach den Gesetzen der Ballistik. Allerdings spielen hier nach eine Reihe von anderen Faktoren eine Rolle, die die Flugbahn beeinflussen. Die Rakete wird oft senkrecht abgeschossen und erfährt während ihrer Steigphase eine Veränderung der Flugbahn. Außerdem nimmt ihre Geschwindigkeit durch den Antrieb während der Steigphase zu. Gleichzeitig aber wird Treibstoff verbraucht, wodurch ihr Gewicht sinkt. Der Luftwiderstand wird nicht allzu groß sein, allerdings fliegt eine Rakete die große Höhen erreicht, durch verschiedene Luftschichten. Möglicherweise kann Wind oder Unwetter den Flug ebenfalls beeinflussen. All diese Faktoren, machen die auf den Meter genaue Vorhersage der Flugbahn einer nicht lenkbaren Rakete äußerst schwierig.

Ich vermute, dass man anhand von einigen gemessenen Punkten einer Rakete den Startpunkt berechnen kann, wenn man anhand eines beobachteten Fluges die Bahngleichung ermittelt hat.



Dass aber dies dann immer noch schwierig ist, beweist die Tatsache, dass die eingangs beschriebene Aufgabe, nämlich die Abschussorte der V2 Rakete, die auf London abgeschossen wurden, nicht erfolgreich gelöst werden konnte. Mithilfe der Rechenleistung moderner Computer wäre dies vielleicht möglich gewesen, aber damals mussten Rechenschieber und Logarithmentafeln genügen. Auf jeden Fall wurde damals wohl kein einziger Startpunkt einer V2 Rakete erfolgreich getroffen.

