Rationale Zahlen – Irrationale Zahlen

In der Septemberausgabe unserer Mathematikzeitschrift stand das Thema irrationale Zahlen im Mittelpunkt. Anlass für mich, mir die Beweise für irrationale Zahlen genauer anzusehen.

Ich möchte versuchen zwei Beweise für die Existenz irrationaler Zahlen möglichst anschaulich und verständliche darzustellen.

Dazu zunächst ein paar Grundlagen:

A. Rationale Zahlen

Rationale Zahlen sind alle Zahlen, die sich durch einen Bruch darstellen lassen.

z.B.: $\frac{2}{5}$, $\frac{133}{10}$ usw. Oder auch allgemein: ein Bruch $\frac{p}{q}$ ist eine rationale Zahl.

Rationale Zahlen können auch als **Dezimalzahl** dargestellt werden. Z. B.: $\frac{133}{10}$ = 13,3

Auch der Bruch $\frac{2}{3}$ ist eine rationale Zahl, obwohl dieser eine unendliche Zahl von Nachkommastellen hat, wenn er als Dezimalzahl dargestellt wird: 0,666666….

Man nennt einen solche Dezimalzahl **periodisc**h, wenn sich die Nachkommstellen irgendwann wiederholen. So z. B. auch $\frac{7}{11}$ = 0,636363….

Ganze Zahlen, gehören ebenfalls zu den rationalen Zahlen, weil sich jede ganze Zahl auch als Bruch darstellen lässt. 2 = $\frac{2}{1}$

B. Irrationale Zahlen

Dem zu Folge müssen dann irrationale Zahlen solche Zahlen sein, die sich nicht durch einen Bruch darstellen lassen. Nach dem oben gesagten können dies nur solche Zahlen sein, die als Dezimalzahl eine unendliche Anzahl von Nachkommastellen haben, die sich auch nicht irgendwann wiederholen, wie etwa 3,167823030921 ….
Aber gibt es solche Zahlen überhaupt? Woher können wir wissen, ob sich die obige Beispielzahl nicht doch irgendwann einmal, sagen wir ab der 7 billionsten Stelle wiederholt?
Kann man die Existenz von irrationalen Zahlen beweisen?
Für diejenigen, die es interessiert möchte ich diesen Beweis hier anschaulich darstellen, weil das Verständnis für einen solchen Beweis gleichzeitig eine wichtige Grundlage für viele anderen Probleme darstellt, die es in der Zahlentheorie gibt.

C. Weitere Grundlagen: Gerade und ungerade Zahlen, Primfaktoren und Teilerfremdheit

Betrachten wir lediglich die **Natürlichen Zahlen**, also positive ganze Zahlen, 1, 2,3,4, usw..
Man unterscheidet **gerade** und **ungerade Zahlen**. Eine gerade Zahl ist immer das doppelte einer beliebigen Zahl n. Oder allgemein:
Sei n beliebige natürliche Zahl. Dann gilt für eine gerade Zahl immer: 2n und für eine ungerade Zahl: 2n-1.
Bsp.: n = 3 gerade Zahl: 2 * 3 = 6, ungerade Zahl: 2 * 3 – 1 = 5.

Jede natürliche Zahl kann in Primfaktoren zerlegt werden. Primfaktoren sind Zahlen, die durch keine andere Zahl außer durch sich selbst teilbar sind (Primzahlen). Zähler und Nenner eines Bruches können in **Primfaktoren** zerlegt werden. Gibt es gemeinsame Primfaktoren kann der Bruch gekürzt werden. Brüche, die nicht weiter gekürzt werden können, heißen **teilerfremd**, weil sie keinen gemeinsamen Teiler besitzen.
Bsp.: $\frac{18}{33} = \frac{2*3*3}{3*11}$ hat den gemeinsamen Primfaktor 3 und kann gekürzt werden in $\frac{6}{11}$.
Im Bruch $\frac{17}{24}$ gibt es keine gemeinsamen Primfaktoren. Deshalb sind Zähler und Nenner teilerfremd.

Noch ein paar Kleinigkeiten:
Das Quadrat einer geraden Zahl ist auch immer eine gerade Zahl.
$(2n)^2 = 4n^2 = 2 * 2 * n^2$ muss ja gerade sein, wegen Faktor 2.
Die Wurzel aus einer Quadratzahl, die gerade ist, muss ebenfalls eine gerade Zahl sein. $\sqrt{(2n)^2} = 2n$, muss also eine gerade Zahl sein.

Nun soll es aber losgehen. Wir wollen beweisen, dass es Zahlen gibt, die nicht rational sind, also irrational sind. Die einfachste Zahl, von der wir vermuten, dass sie irrational sein könnte ist, √2. Der Taschenrechner zeigt als Ergebnis 1,414213562. Mehr Stellen werden meist im Display nicht angezeigt. Allerdings geht die Zahl noch weiter. Aber wie weit? Wir wissen es nicht, weil noch niemand sämtliche Nachkommastellen berechnet hat. Wenn wir zeigen wollen, dass die Zahl irrational ist, also unendlich viele, nicht sich wiederholende Nachkommastellen hat, dann geht dies am besten, indem wir zeigen, dass die Zahl nicht rational sein kann. Man nennt dies einen **Widerspruchsbeweis**.
(Wenn man beweisen will, dass ein Täter zur fraglichen Zeit nicht am Tatort war, dann brauche ich nur zu beweisen, dass er zur fraglichen Zeit an einem anderen Ort war. Da er sich nicht an zwei Orten gleichzeitig befinden kann, ist seine Unschuld damit durch einen Widerspruch bewiesen).

Der berühmteste Beweis dieser Art stammt von dem griechischen Mathematiker **Euklid** (um 300 v. Chr.)

Wenn $\sqrt{2}$ rational ist, muss gelten: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, wobei m und n teilerfremd sind.

Wir quadrieren diese Gleichung: $2 = \frac{m^2}{n^2}$.

Nach Umstellen: $2 \cdot n^2 = m^2$.

Damit muss m^2 eine gerade Zahl sein. Dann muss auch m eine gerade Zahl sein, weil die Wurzel aus einer geraden Quadratzahl ebenfalls eine gerade Zahl ist.
Wenn m^2 gerade ist, dann ist $2 \cdot n^2$ ebenfalls gerade und damit auch n^2 (die Hälfte davon).
Da die Wurzel aus einer geraden Quadratzahl ebenfalls eine gerade Zahl ist, ist also auch n eine gerade Zahl.
Wenn aber m und n gerade Zahlen sind, könnte man den Bruch zumindest durch 2 kürzen. Damit wäre der Bruch $\frac{m}{n}$ nicht teilerfremd. Dies ist ein Widerspruch zur Anfangsaussage. Damit kann $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl sein!

Das Dumme ist, dass dieser Beweis zwar für die Wurzel aus 2 funktioniert, nicht aber für die Wurzel aus 3, obwohl dies ebenfalls eine irrationale Zahl ist.
Ein anderer Beweis, der für mehrere Wurzeln gültig ist, ist der von dem YouTube-Blogger **DorFuchs** vorgestellte:

Angenommen $\sqrt{2}$ sei rational! Dann muss gelten: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, wobei p und q teilerfremd sind und p und q natürliche Zahlen sind.

Dann gilt auch: $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ oder $\frac{p^2}{q^2} = \frac{2}{1}$

Wenn p und q teilfremd sind, muss dies auch für p^2 und q^2 gelten, da in p^2 und q" dieselben Primfaktoren vorkommen, wie in p und q; nur doppelt so oft.

D.h. die beiden Brüche $\frac{p^2}{q^2}$ und $\frac{2}{1}$ sind zwei vollständig gekürzte Brüche (da teilerfremd), die beide gleich sind. Damit muss $p^2 = 2$ sein. Dies kann aber nicht sein, da ja p eine natürliche Zahl sein muss und es keine natürliche Zahl gibt, die zum Quadrat 2 ergibt.
Damit liegt ein Widerspruch vor!

Dieser Beweis funktioniert mit jeder Zahl, die keine Quadratzahl ist.