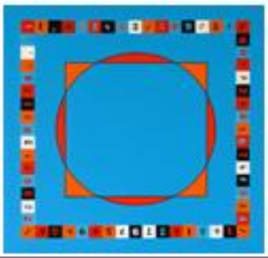
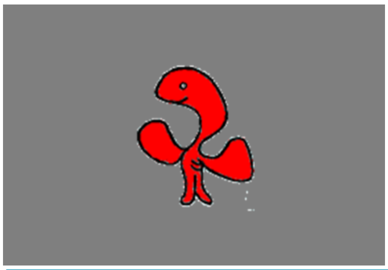
Max-Weber-Schule Gießen

Analysis

und beschreibende Statistik

Skript für den Mathematikunterricht
in der Fachoberschule



Themen

Jochen Pellatz
Version 6.0 2017

Das vorliegende Skript gibt einen Überblick über die wichtigsten Unterrichtsinhalte in der Klasse 11 und 12 der Fachoberschule. Es ist als Ergänzung zum Unterricht zu sehen. Einige Lösungsverfahren werden nur angedeutet und müssen im Unterricht vertiefend behandelt werden. Der Aufgabenteil sollte im Unterricht auf jeden Fall durch anwendungsorientierte Aufgaben ergänzt werden.

Funktionale Zusammenhänge
Das Arbeiten mit Funktionen wird anhand linearer und quadratischer Zusammenhänge dargestellt.

Funktionen
Hier wird ein Überblick über die Funktionen gegeben, die im ersten Kapitel noch nicht beschrieben wurden. Dabei liegt der Schwerpunkt auf den ganzrationalen Funktionen. Außerdem werden die wichtigsten Funktionsklassen kurz dargestellt.

Nullstellen
Die Nullstellenberechnung ist das zentrale Thema der Analysis. Hier werden alle wichtigen Verfahren ausführlich dargestellt.

Einführung in die Differentialrechnung
Die Grundlagen der Differentialrechnung sowie wichtige Anwendungsgebiete werden hier behandelt

Anwendungen der Differentialrechnung
Kurvendiskussion, Bestimmen von Funktionsgleichungen aus gegebenen Eigenschaften, Untersuchung von Kosten, Erlös- und Gewinnfunktionen, Extremwertaufgaben

Grundlagen der Integralrechnung
Die wichtigsten Aufgabenstellungen der Integralrechnung werden dargestellt.

Exponentialfunktionen
Exponentialfunktionen bieten viele Bezüge zur Realität zu Natur und Umwelt.

Beschreibende Statistik
Es geht um die grundlegenden Kenntnisse für die Erhebung, die Auswertung und die Bewertung von statistischen Daten.

Merksätze, Begriffe und Symbole
Manchmal ist es nötig, dass man bestimmte mathematische Regeln und Sätze kennt. Die, die wir für den Unterricht benötigen, werden hier genannt. Außerdem werden die wichtigsten Begriffe und verwendeten Symbole erläutert.

Funktionale Zusammenhänge

1. Grundlagen

1.1 Was sind Funktionen?

Unter einer Funktion versteht man eine Beziehung oder einen Zusammenhang zwischen zwei oder mehreren Größen. Dabei wird immer eine Größe von einer oder mehreren anderen Größen bestimmt. Man sagt: Die Größe A ist eine Funktion der Größe B, oder die Größe A ist eine Funktion der Größen B und C.

Beispiel: Das Wachstum einer Pflanze ist eine Funktion der Sonnenscheindauer und der Ernährung; der Gewinn eines Unternehmens ist eine Funktion der Umsatzhöhe und der Kosten; die zurückgelegte Strecke eines Fahrzeuges ist eine Funktion der Fahrzeit und der Geschwindigkeit.

1.2 Funktionen in der Mathematik

Die Mathematik versucht, funktionale Zusammenhänge quantitativ, d.h. mit Zahlen und Rechenzeichen zu erfassen. Wir befassen uns im Rahmen dieses Lehrgangs nur mit der Beziehung zwischen zwei Größen. Dabei nennen wir die Größe, die von der anderen beeinflusst wird meist **Y** oder **f** und die beeinflussende Größe wird meist mit **x** bezeichnet.

Beispiel 1: Ein Liter Benzin kostet 1,10 €. Wenn ein Fahrzeug 40 Liter Benzin tankt, so kostet das Benzin also insgesamt 40 * 1,10 = 44 €. Wenn wir diesen Zusammenhang als mathematische Funktion beschreiben wollen und wir den gesamten Benzinpreis mit Y und getankte Benzinmenge mit x (Liter) bezeichnen, so lautet die Funktionsgleichung: $Y = 1{,}10x$.
Beispiel 2: Die Fläche eines Kreises ist abhängig von der Länge des Radius. Wenn wir die Kreisfläche mit F bezeichnen und Länge des Radius (in cm) mit r, so lautet die Funktionsgleichung: $F = \pi r^2$ oder $Y = \pi x^2$.

1.3 Darstellungsformen mathematischer Funktionen

Funktionen werden in der Mathematik vorwiegend auf drei verschiedene Arten beschrieben: Durch eine **Funktionsgleichung**, durch eine **Wertetabelle** und durch ein **Schaubild**.

1.3.1 Darstellung durch eine Funktionsgleichung (Funktionsterm)

Die Gleichung $Y = 2x + 1$ bedeutet, dass sich zu jedem beliebigen x-Wert ein Y-Wert nach der angegebenen Gleichung errechnet. D.h. die Größe des x-Wertes bestimmt den Wert von Y.

Beispiel: Wenn $x = 1$, dann errechnet sich Y als $2 * 1 + 1 = 3$.

Schreibweisen: Anstatt $\mathbf{Y = 2x + 1}$ kann man auch schreiben $\mathbf{f(x) = 2x + 1}$. Der Name der Funktion ist **f**. Funktionsnamen werden mit kleinen Buchstaben bezeichnet, wobei die erste Funktion in einer Aufgabe den Namen f erhält, weitere dann g, h usw. genannt werden. Die Schreibweise f(x) bedeutet, dass der Wert der Funktion f durch die Größe des x-Wertes bestimmt wird. D.h. $f(3) = 2 * 3 + 1 = 7$, da für x die Zahl 3 eingesetzt wird.
Es gilt: $Y = f(x)$. Bei linearen Funktionen nennt man die Funktion meist Y, bei Funktionen höheren Grades meist f.

1.3.2. Darstellung durch eine Wertetabelle

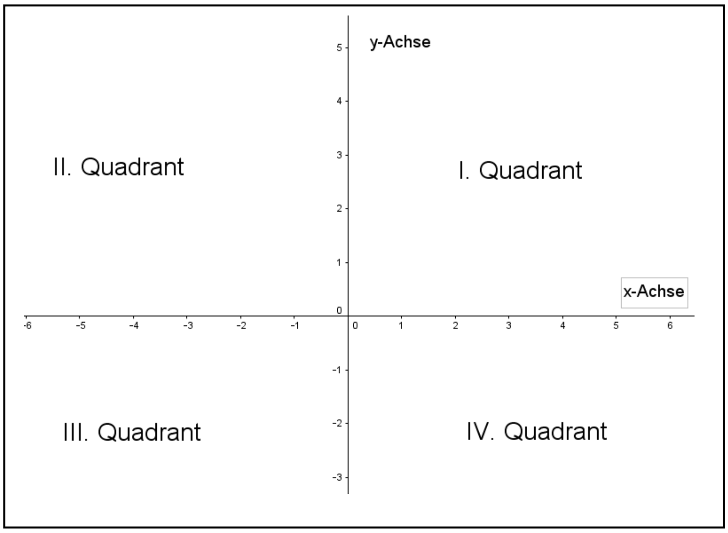
Aus unserer Beispielfunktion $Y = 2x + 1$ ergibt sich folgende Wertetabelle:

X	-2	-1	0	1	2	3
Y	-3	-1	1	3	5	7

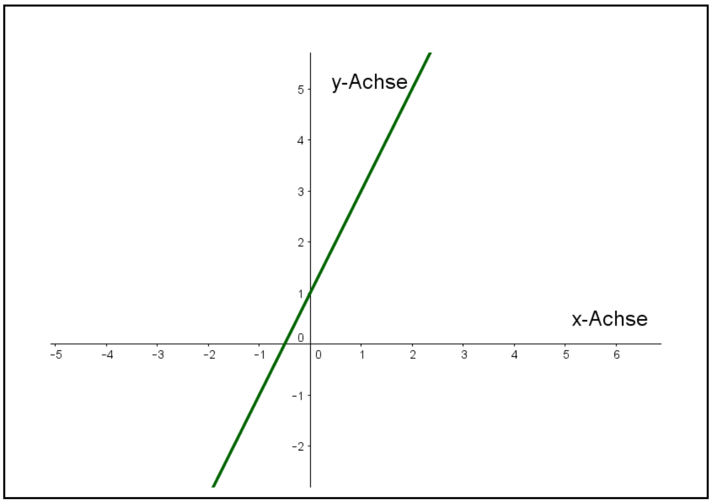
Unter jedem x-Wert steht der Y-Wert, der sich durch Einsetzen des x-Wertes in die Funktionsgleichung errechnet. Welche x-Werte in der Tabelle verwendet werden, ist abhängig von der Aufgabenstellung.

1.3.3 Darstellung als Funktionsgraph

Den Zusammenhang zwischen x-Werten und den dazugehörigen Funktionswerten kann man in einem Achsenkreuz darstellen.
Dabei ist die x-Achse die waagerechte Achse und die Funktionsachse oder y-Achse die senkrechte Achse.
Die vier Bereiche des Achsenkreuzes werden wie nebenstehend nummeriert.



Wenn man die eingezeichneten Wertepaare miteinander verbindet, erhält man den **Graphen** der Funktion.
Für unsere Funktion Y = 2x + 1 ergibt sich nebenstehender Graph.

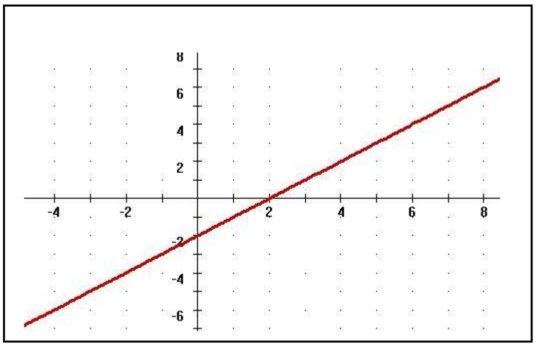


1.3.4 Darstellung in verbaler Form

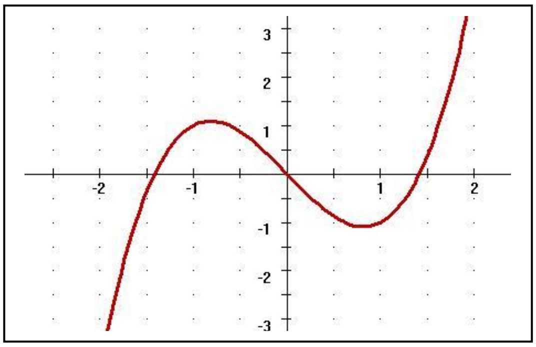
Manche Funktionen lassen sich auch mit Worten beschreiben. Die verbale Aussage **„Der Preis beträgt 7,50 € pro Stunde zuzüglich einer Grundgebühr von 20 €"** kann als Funktionsgleichung durch P(x) = 7,5x + 20 ausgedrückt werden.

2. Lineare Funktionen

Unter einer **linearen Funktion** versteht man ein Funktion, deren Graph eine **Gerade** ist. Dagegen hat der Graph einer **nicht-linearen Funktion** einen gekrümmten Verlauf, den man eine Kurve nennt.

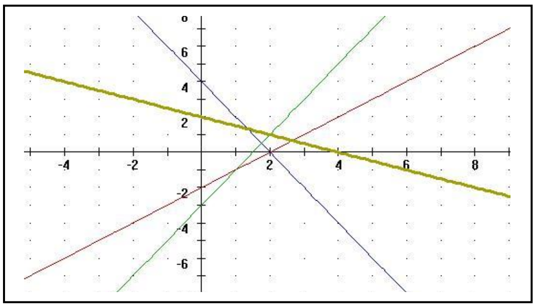


Linearer Graph

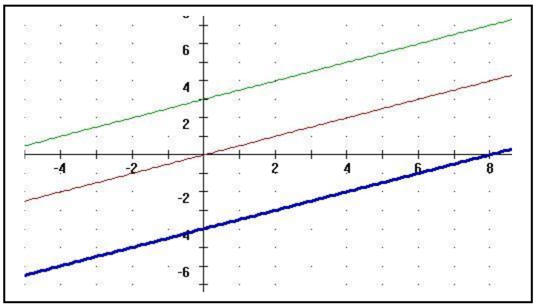


kurvenförmiger Graph

Die Graphen linearer Funktionen unterscheiden sich einmal durch ihre **Steigung** und zum anderen durch ihre **Lage** im Koordinatenkreuz



Lineare Funktionen mit verschiedenen Steigungen



lineare Funktionen mit gleicher Steigung aber unterschiedlicher Lage

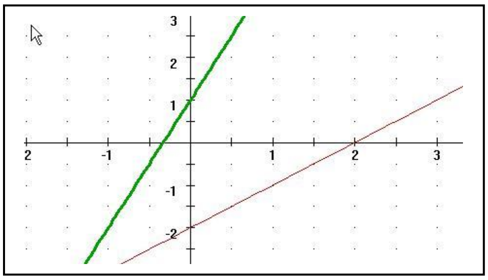
Die allgemeine Gleichung einer linearen Funktion lautet

$$\boxed{y = mx + b}$$

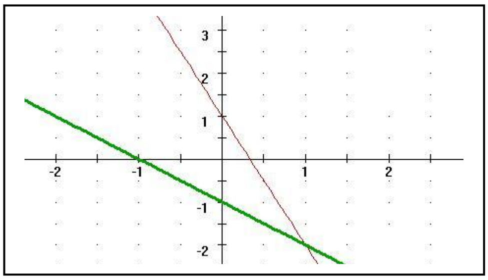
Die Größe m bezeichnet die Steigung der Geraden, die Größe b bezeichnet den Schnittpunkt mit der y-Achse.

2.1 Die Steigung einer Geraden

Eine Gerade mit einer positiven Steigung verläuft von links unten nach rechts oben, eine Gerade mit einer negativen Steigung verläuft von links oben nach rechts unten. Je näher das Steigungsmaß an 0 liegt, desto flacher verläuft die Gerade.

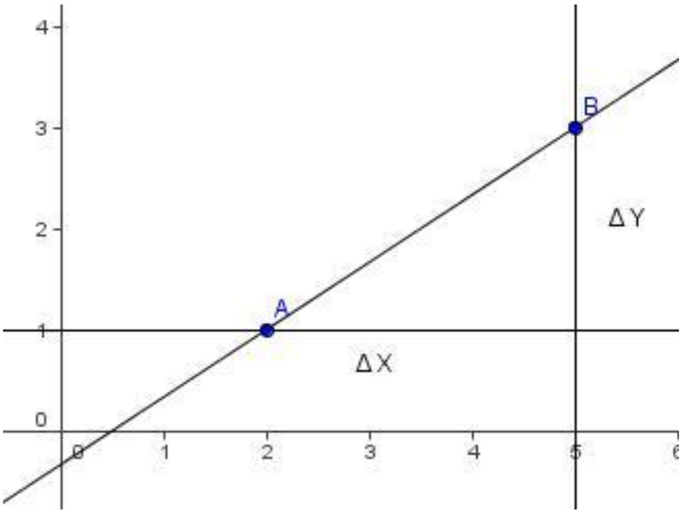


Geraden mit positiver Steigung



Geraden mit negativer Steigung

Um die Steigung einer Geraden zu messen, benötigt man die Koordinaten von zwei Punkten, die auf der Geraden liegen. Zeichnet man wie im Schaubild ein Steigungsdreieck, so ergibt sich die Steigung als Quotient der beiden Strecken ΔY und ΔX (Δ heißt ‚Delta').



Die Länge der Strecken ΔY und ΔX lässt sich aus den Koordinaten der beiden Punkte errechnen.

Die Formel für die Steigung lautet also $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}\, oder\, \frac{Y2 - Y1}{X2 - X1}$

> <u>Beispiel:</u> Wir zeichnen ein Steigungsdreieck mit den beiden Punkten A(2/1) und B(5/3). Es ergibt sich folgende Steigung der Geraden:
>
> $$m = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = \frac{3-1}{5-2} = \frac{2}{3}$$

Für das Steigungsdreieck können zwei beliebige Punkte auf der Geraden gewählt werden. Der Quotient ist immer gleich, denn eine Gerade hat an jedem Punkt dieselbe Steigung. Den Quotienten, der sich durch die Division von ΔY durch ΔX ergibt, nennt man auch **Differenzenquotient.**

Bei negativen Koordinaten ist bei der Berechnung des Differenzenquotienten auf die Vorzeichen zu achten.

Beispiel: Eine Gerade geht durch die beiden Punkte $P_1(-1/-2)$ und $P_2(2/3)$. Es errechnet sich folgende Steigung:

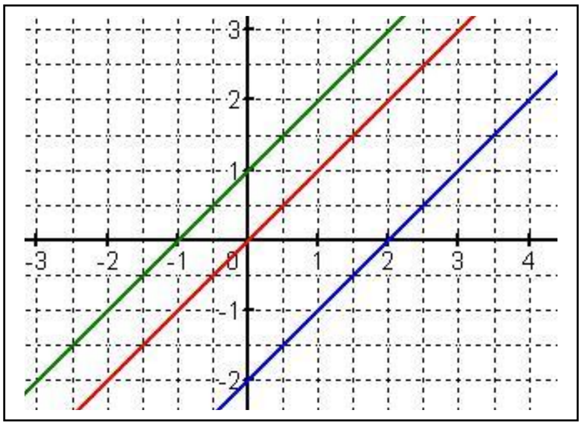
$$m = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = \frac{3-(-2)}{2-(-1)} = \frac{5}{3}$$

Das Steigungsmaß ergibt sich auch aus dem Tangens des Winkels, den die Gerade mit der x-Achse bildet. $\tan(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Hypothenuse} = \frac{5}{3}$. Dieses entspricht einem Winkel von 59,04 Grad.

2.2 Der Schnittpunkt mit der Y-Achse

Der Faktor b gibt den Schnittpunkt einer Geraden mit der Y-Achse an.
Beispiel: Die Gerade mit der Gleichung Y = 2x – 3 schneidet die Y-Achse bei (0 / -3), da b = -3

Durch eine Veränderung des Faktors b kann man eine Gerade parallel nach oben oder unten verschieben. Wenn b = 0 ist, geht die Gerade durch den Ursprung. Man nennt eine solche Gerade Ursprungsgerade.

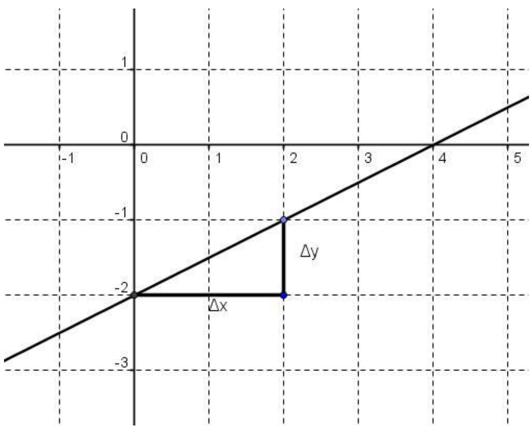


2.3 Geradengleichungen

Die Gerade mit der Gleichung f(x) = 0,5x – 2 hat eine Steigung von 0,5 und schneidet die Y-Achse bei (0 / -2). Mit diesen beiden Angaben kann eine Gerade auch ohne Wertetabelle gezeichnet werden.

1. Markiere den Schnittpunkt mit der Y-Achse (0 / -2).
2. Zeichne ein Steigungsdreieck mit der Steigung 0,5.

   Der Differenzenquotient $\frac{\Delta Y}{\Delta X}$ hat den Wert 0,5. Wenn wir vom Schnittpunkt (0 / -2) ausgehen, finden wir einen zweiten Punkt, indem wir 2 Einheiten nach rechts und 1 Einheit nach oben gehen. Diese wäre der Punkt (2 / -1).



2.4. Der Schnittpunkt mit der x-Achse (Nullstelle)

Jede Gerade (außer einer Parallelen zur x-Achse) schneidet die x-Achse. Diesen Schnittpunkt bezeichnet man als Nullstelle. An dieser Stelle ist der Funktionswert Y = 0. Man kann die x-Koordinate der Nullstelle also errechnen, indem man Y = 0 setzt und die Gleichung nach x auflöst.

Beispiel: Die Nullstelle der Geraden mit der Gleichung Y = 2x – 5 ist gesucht.
Wir setzen Y = 0: 2x – 5 = 0 | +5
2x = 5 | : 2
x = 2,5 Die Nullstelle liegt bei (2,5/0).

2.5 Bestimmen von Geradengleichungen anhand zweier Größen

Eine Gerade ist durch die Angabe von zwei Größen eindeutig bestimmbar. Um die Funktionsgleichung einer Geraden berechnen zu können, müssen **entweder die Koordinaten von zwei Punkten bekannt** sein oder **die Koordinaten eines Punktes und die Steigung der Geraden.**

Beispiele:

a) Eine Gerade hat die Steigung m = 1,5 und geht durch den Punkt P(3/1). Wie lautet die Funktionsgleichung der Geraden?
Lösung: Man setzt die Koordinaten des Punktes P und die Steigung m in die allgemeine Funktionsgleichung Y = mx + b ein und berechnet b.

1 = 1,5 * 3 + b | - 4,5 → b = - 3,5 **y = 1,5x – 3,5**

b) Eine Gerade geht durch die Punkte A(-1 / 4,5) und B(3 / 2,5). Wie lautet die Funktionsgleichung der Geraden?
Lösung: Man berechnet zunächst mit Hilfe des Differenzenquotienten die Steigung der Geraden und verfährt dann wie in Bsp. a).

$$m = \frac{2{,}5 - 4{,}5}{3-(-1)} = \frac{-2}{4} = -0{,}5$$ Koordinate von Punkt A einsetzen

4,5 = -0,5 *(-1) + b |-0,5 → b = 4 **Y = -0,5x + 4**

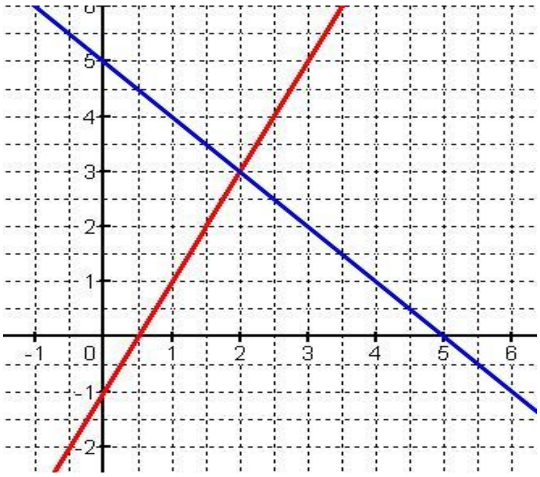
c) Aufgabe b) ließe sich auch mit einem **Gleichungssystem** für zwei Unbekannte lösen. Diese Methode werden zu einem späteren Zeitpunkt häufiger anwenden müssen.
Lösung : Gesucht wird eine Gleichung der Form Y = mx + b. Diese Gleichung hat zwei Unbekannte (m und b). Wir stellen ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen aus den Koordinaten der beiden Punkte auf.

einsetzen von (-1 / 4,5) (1) 4,5 = -1m + b
einsetzen von (3 / 2,5) (2) 2,5 = 3m + b
(2) von (1) subtrahieren 2 = -4m | : (-4)
-0,5 = m
m in (1) einsetzen (1) 4,5 = -1*(-0,5) + b |-0,5
4 = b
Y = -0,5x + 4

2.6 Besondere Aufgabenstellungen

a) <u>Schnittpunkte zweier Geraden</u>

Den Schnittpunkt zweier Geraden berechnet man, indem man die beiden Funktionsgleichungen gleichsetzt und nach x auflöst.



Beispiel: Der Schnittpunkt der beiden Geraden $y = 2x - 1$ und $y = -x + 5$ ist gesucht.

$2x - 1 = -x + 5$ |+x, +1

$3x = 6$

$x = 2$

x einsetzen: $y = 2 \cdot 2 - 1 \rightarrow y = 3 \rightarrow$ **S(2 / 3)**

b) <u>Senkrechte zu einer Geraden (**Orthogonale**)</u>

Die Steigung zweier Senkrechten steht zueinander in einem konstanten Verhältnis. Sei m_1 die Steigung einer Geraden und m_2 die Steigung einer anderen Geraden, die zu der ersten Geraden im rechten Winkel verläuft, so gilt immer:

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \quad \text{oder} \quad m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

Beispiel: Sei $m_1 = 2$, so muss $m_2 = -0{,}5$ sein, da $2 \cdot (-0{,}5) = -1$

c) <u>Mittelpunkt einer Strecke</u>

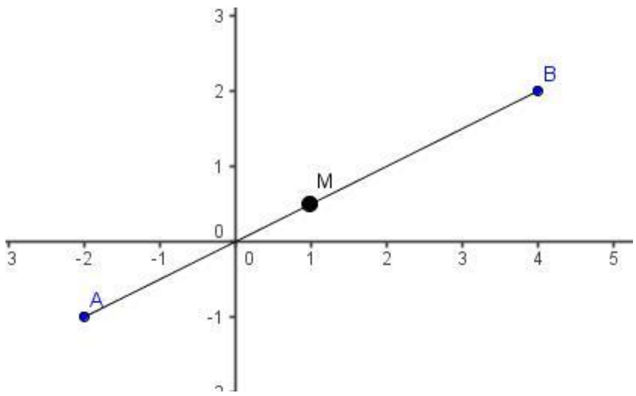
A(-2/-1) und B(4 / 2) sind die Eckpunkte einer Strecke.

Der Mittelpunkt dieser Strecke errechnet sich dann durch die Halbierung der Abstände in x- und y- Richtung.

X-Achse: Abstand von A nach B beträgt 6 EH. Die Hälfte ist 3, d.h. die x- Koordinate des Mittelpunktes liegt bei –2 + 3 = 1.

Y-Achse: Abstand von A nach B beträgt 3 EH. Die Hälfte ist 1,5, d.h. die y-Koordinate des Mittelpunktes liegt bei –1 + 1,5 = 0,5.

Die Koordinate des Mittelpunktes liegt bei M (1 / 0,5).



d) Länge einer Strecke, Abstand zweier Punkte

Die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkte ist eine Gerade. Wenn wir die Koordinaten von zwei Punkten haben, denken wir uns eine Gerade durch die beiden Punkte und berechnen deren Länge mit dem Satz des Pythagoras.

Der Abstand der beiden Punkte $P_1(1 / 2)$ und $P_2(5 / 4)$ wird dann so berechnet:

($c^2 = a^2 + b^2$)

Es ist b = 4 ($x_2 - x_1$) → $b^2 = 16$ und

a = 2 ($y_2 - y_1$) → $a^2 = 4$
16 + 4 = 20 → $20 = c^2$
c = 4,47

e) Abstand eines Punktes von einer Geraden

Der kürzeste Abstand eines Punktes von einer Geraden ist die Strecke der **Orthogonalen** zu der Geraden, die durch den Punkt geht. Diese berechnen wir wieder mit dem Satz des Pythagoras. Zunächst muss allerdings der Schnittpunkt der Orthogonalen mit der Geraden bestimmt werden.

Beispiel: Welchen Abstand hat der Punkt A(5/1) von der Geraden f(x) = 0,5x + 4 ?

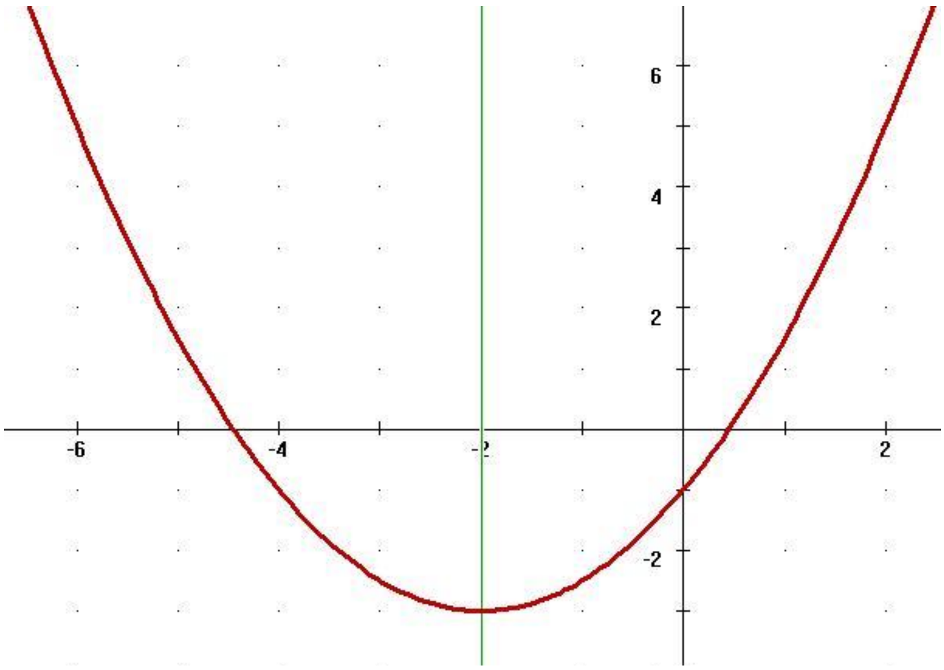
Die Orthogonale hat die Steigung –2 (da $m_2 = \frac{-1}{0{,}5}$), die Gleichung der Orthogonalen ergibt sich aus dem Punkt A und der Steigung mit g(x) = -2x + 11.
Durch Gleichsetzen von 0,5x + 4 = -2x + 11 ergibt sich der Schnittpunkt S(2,8/5,4).
Damit ist b =4, 4 → b^2 = 19,36 und
a = 2,2 → a^2 = 4,84
19,36 + 4,84 = 24,2 → 24,2 = c^2
c = 4,9193...

3. Quadratische Funktionen

Lineare Funktionen stellen sich im Koordinatenkreuz als **Geraden** dar. Die meisten anderen Funktionen haben einen kurvenförmigen Verlauf. Die einfachsten Kurven sind Parabeln. Schaubilder quadratischer Funktionen nennt man **Parabeln**. Quadratische Funktionen erkennt man daran, dass in ihrer Funktionsgleichung der Term x^2 vorkommt. Die allgemeine Gleichung einer quadratischen Funktion lautet:

$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$$

Den höchsten oder tiefsten Punkt einer Parabel bezeichnet man als Scheitelpunkt. Parabeln als Schaubilder quadratischer Funktionen sind immer achsensymmetrisch, d.h. sie lassen sich durch Spiegelung an einer Senkrechten durch den Scheitelpunkt abbilden.

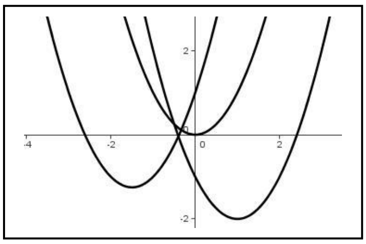


3.1 Der Formfaktor a

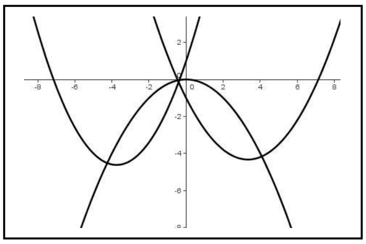
Bei den linearen Funktionen bestimmte die Größe m die Steigung des Graphen. Bei quadratischen Funktionen gibt die Größe a (Vorzahl des Terms x^2) die Form der Parabel an. Man nennt deshalb a den **Formfaktor**. Eine Parabel kann gestreckt oder gestaucht sein, sie kann nach oben oder nach unten geöffnet sein. Das hängt jeweils vom Formfaktor a ab. Ist der Formfaktor 1 so bezeichnet man eine solche Parabel als **Normalparabel** (z.B. $f(x) = x^2 - 2x + 1$).

Es gilt:

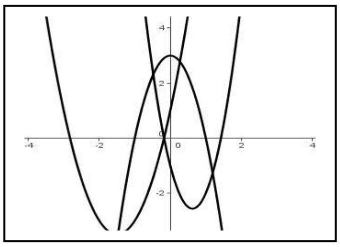
$|a| = 1$ → Normalparabel
$|a| < 1$ → breiter als Normalparabel (gestaucht)
$|a| > 1$ → schmaler als Normalparabel (gestreckt)
$a < 0$ → Parabel ist nach unten geöffnet
$a > 0$ → Parabel ist nach oben geöffnet



Verschiedene Normalparabeln



gestauchte Parabeln



gestreckte Parabeln

3.2 Symmetrie der quadratischen Funktion

Kennzeichen einer Parabel ist ihre Symmetrie. D.h. jeder Punkt auf dem linken Parabelast ist von der Spiegelachse gleich weit entfernt, wie der entsprechende Punkt auf dem rechten Parabelast. Der Scheitelpunkt liegt immer genau zwischen zwei Punkten, die den gleichen Funktionswert (y-Wert) haben.

Beispiel: Es sei $f(2) = 10$ und $f(6) = 10$. Dann muss der Scheitelpunkt genau zwischen 2 und 6 , also bei $x = 4$ liegen.

3.3 Sonderfall: Die reinquadratische Funktionsgleichung

Gleichungen der Form $f(x) = ax^2 + c$ bezeichnet man als **reinquadratisch**, da sie keinen linearen Term (mit x) enthalten. Bei diesen Funktionsgleichungen liegt der Scheitelpunkt immer auf der y-Achse ($x = 0$). Der Faktor c gibt in diesem Fall die Verschiebung des Scheitelpunktes nach unten oder oben an.

Beispiel: Der Scheitelpunkt der Parabel mit der Gleichung $f(x) = 2x^2 + 2$ liegt bei **S(0/2)**.
Der Scheitelpunkt der Parabel mit der Gleichung $f(x) = -0{,}5x^2 - 3$ liegt bei **S(0/-3)**.

3.4. Grundlegende Aufgabenstellungen zu quadratischen Funktionen

3.4.1 Wenn die Funktionsgleichung bekannt ist

a) Berechnen von Funktionswerten

Beispiel: $f(x) = 1,5x^2 - 2x + 3$ Bestimme den Funktionswert für $x = 2$
$f(2) = 1,5*2^2 - 2*2 + 3 \rightarrow f(2) = 5$

b) Bestimmen von x-Werten anhand bekannter Funktionswerte

Beispiel: $f(x) = 1,5x^2 - 2x + 3$ Bestimme den $f(?) = 5$
$1,5x^2 - 2x + 3 = 5$ $\rightarrow$ $1,5x^2 - 2x - 2 = 0$ Löse quadr. Gleichung
$X_1 = 2$, $x_2 = -\frac{2}{3}$

Verfahren zum Lösen quadratischer Gleichungen siehe im **Anhang**

c) Schnittpunkte mit der x-Achse (Nullstellen)

Die Berechnung der Nullstellen hat bei allen Funktionstypen eine wichtige Bedeutung und taucht im Zusammenhang mit vielen Aufgabenstellungen auf.

Bedingung für eine Nullstelle: $f(x) = 0$.

Beispiel: $f(x) = 2x^2 + 4x - 16$ Löse die quadratische Gleichung
$X_1 = 2$ $x_2 = -4$ $N_1(2/0)$, $N_2(-4/0)$

Siehe Aufgaben im Aufgabenteil

a) Schnittpunkt mit der y-Achse

Der Schnittpunkt mit der Y-Achse ergibt sich, wenn x = 0. Wir können den Schnittpunkt unmittelbar aus der Funktionsgleichung als konstanten Faktor ablesen.

Beispiel: $f(x) = 0,5x^2 - 3x - 2,5$ Der konstante Faktor ist –2,5, also ist liegt der Schnittpunkt mit der Y-Achse bei (0/-2,5)

b) Berechnung des Scheitelpunktes

Die Bestimmung der Scheitelpunktkoordinaten geschieht mit Hilfe der quadratischen Ergänzung, indem man die allgemeine Form der Funktionsgleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$ in die **Scheitelpunktsform $f(x) = a(x - x_s)^2 + Y_s$** überführt.

Beispiel: $f(x) = 0,5x^2 + 3x + 3,5$ $\rightarrow$ $f(x) = 0,5(x + 3)^2 - 1$
Scheitelpunkt (-3 / -1)

3.4.2 Bestimmen der Funktionsgleichung anhand bekannter Werte

Die allgemeine Form der quadratischen Funktion lautet $f(x) = ax^2 + bx + c$. Die drei Parameter a, b und c müssen bekannt sein, um die Funktionsgleichung bestimmen zu können.

a) Scheitelpunkt einer Normalparabel ist bekannt

Beispiel: Der Scheitelpunkt habe die Koordinaten (2 / -5), da a = 1 ist ergibt sich durch Einsetzen in die Scheitelpunktsform:
$f(x) = (x - 2)^2 - 5$ → $f(x) = x^2 - 4x - 1$

b) Scheitelpunkt und Formfaktor bekannt

Beispiel: S(-2 / 3), a = 0,5
$f(x) = 0{,}5(x + 2)^2 + 3$ → $f(x) = 0{,}5x^2 + 2x + 5$

c) Scheitelpunkt und ein weiterer Punkt ist bekannt

Beispiel: S(-2 / 3), P(-1 / 0) Die Koordinaten des Scheitelpunktes und des Punktes P werden in die Scheitelpunktsform eingesetzt, um so den Parameter a zu bestimmen.
$0 = a(-1 + 2)^2 + 3$ → $0 = a + 3$ → $a = -3$
nochmaliges Einsetzen in die Scheitelpunktsform:
$f(x) = -3(x + 2)^2 + 3$ → $f(x) = -3x^2 - 12x - 9$

b) Drei Punkte sind bekannt

Beispiel: Gegeben sind die Koordinaten der Punkte A(0 / 16), B(1 / 6) und C(4 / 0)
Zur Lösung stellen wir ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen aus den Koordinaten der drei Punkte auf:

(1) $16 = c$
(2) $6 = a + b + c$
(3) $0 = 16a + 4b + c$
Es ergibt sich: a = 2, b = -12 und c = 16 → $f(x) = 2x^2 - 12x + 16$

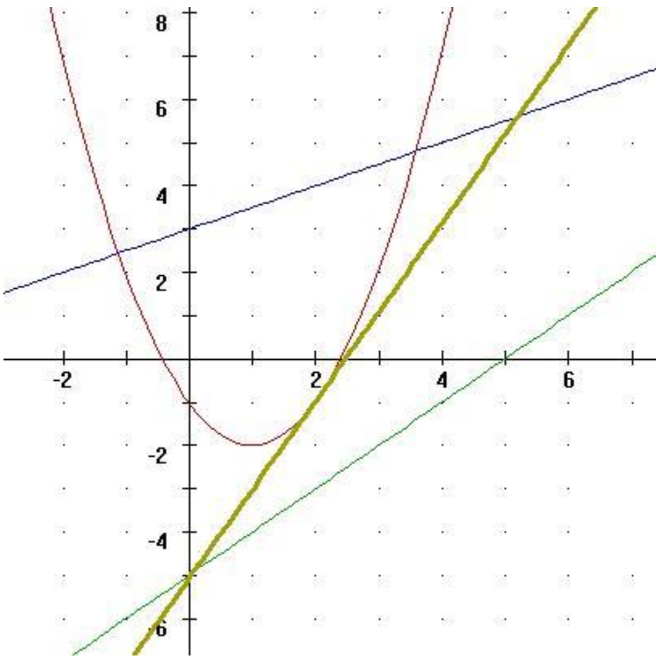
3.4.3 Parabel und Gerade

Befinden Sie eine Parabel und eine Gerade im Koordinatenkreuz, so können die Geraden drei unterschiedliche Beziehungen zur Parabel haben:

a) Die Gerade schneidet die Parabel.
Eine Gerade, die eine Kurve schneidet, bezeichnet man als **Sekante**.

b) Die Gerade hat keinen Punkt mit der Parabel gemeinsam.
Eine Gerade, die an einer Kurve vorbei führt, ohne sie zu schneiden oder zu berühren, wird als **Passante** bezeichnet.

c) Die Gerade berührt die Parabel in einem Punkt
Eine Gerade, die eine Kurve an einer Stelle nur berührt, heißt **Tangente**. Eine Tangente, hat dieselbe Steigung, wie die Kurve im Berührpunkt.



Rechnerische Lösung: Um welche Art von Gerade es sich handelt, kann man feststellen, indem man die Funktionsgleichungen gleichsetzt. Ergeben sich zwei Schnittpunkte handelt es sich um eine Sekante, gibt es nur eine Lösung, dann handelt es sich um eine Tangente, gibt es keine Lösung, dann liegt eine Passante vor.

<u>Beispiel:</u> $f(x) = 0{,}5x^2 + 2x - 3$, $g(x) = x - 4$.
$0{,}5x^2 + 2x - 3 = x - 4 \rightarrow \quad 0{,}5x^2 + x + 1$ hat keine Lösung, also Passante.

4. Aufgabenteil

Aufgaben zu Kapitel 1

1. Erklären Sie die Begriffe Funktion, Funktionsgleichung und Graph.

2. Erstellen Sie für die folgenden Funktionsgleichungen eine Wertetabelle für die angegebenen x-Werte und zeichnen Sie den Graphen.
   a) $f(x) = x – 3$ (ganzzahlige x-Werte von –3 bis +4)
   b) $f(x) = -0{,}5x+2$ (ganzzahlige x-Werte von –3 bis +3)
   c) $f(x) = x^2$ (x-Werte von –3 bis +3 im Abstand 0,2)
   d) $f(x) = 0{,}5x^3 -x$ (ganzzahlige x-Werte von –3 bis +3)

3. Wie lauten die Funktionsgleichungen zu folgenden Wertetabellen:

a)

X	-1	0	1	2	3
y	-1,5	-1	-0,5	0	0,5

f(x) =

b)

X	-1	0	1	2	3
y	4	3	2	1	0

f(x) =

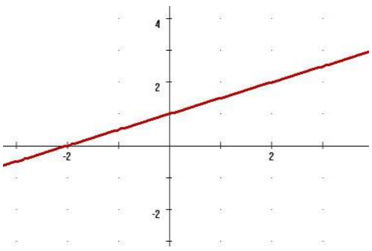
4. Berechnen Sie die Funktionswerte für die angegebenen Stellen
   a) $f(x) = 0{,}2x – 3$ $x = 3$
   b) $f(x) = -1{,}5x + 0{,}5$ $x = -2{,}5$
   c) $f(x) = x^2- 2$ $f(2) =$
   d) $f(x) = 0{,}5x^3$ $f(-2) =$

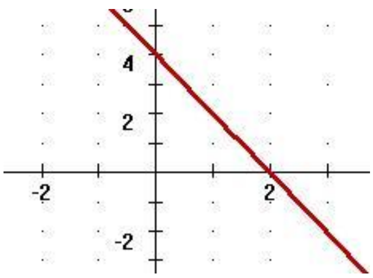
Aufgaben zu Kapitel 2

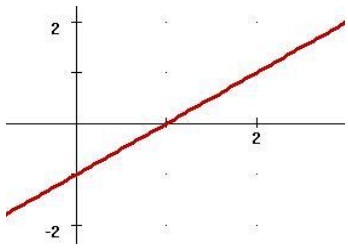
1. Zeichen Sie die Geraden mit der angegebenen Gleichung
a) $f(x) = -3x + 4$ b) $f(x) = 0{,}4x – 1{,}2$ c) $f(x) = -0{,}2x + 1$

d) $f(x) = 50x – 200$ e) $f(x) = -\frac{2}{7}x + 3$

2. Bestimmen Sie die Steigung und die Funktionsgleichung der abgebildeten Geraden.







3. Berechnen Sie die Steigung der Geraden, die durch die beiden Punkte geht.
a) P(0/0), Q(3/4) b) A(-2/-1), B(3/7) c) C(-4/1), D(5/2)
d) A(-0,6/-2), B(2,2/4)

4. Prüfen Sie rechnerisch nach, ob die Punkte auf der Geraden liegen.

a) f(x) = 3x – 5	A(3/4)	B(-5/20)	C(1,5/-0,5)
b) f(x) = -0,5x + 1,5	A(1/-2)	B(-2/3)	C(0,5/1,25)

5. Berechnen Sie den Schnittpunkt mit der x-Achse (Nullstelle)

a) f(x) = 2x –5 b) f(x) = -3x + 6 c) f(x) = 0,3x – 4 d) f(x) = 2,5x –60

6. Von einer linearen Funktion ist die Steigung und der Punkt A bekannt. Berechnen Sie die fehlende Koordinate des Punktes B.

a) m = 2	A(-1/0)	B(2/ ?)
b) m = 0,25	A(-2/-4)	B(0/ ?)
c) m = -0,5	A(-3/4)	B(?/1)

7. Berechnen Sie die Funktionsgleichung der Geraden aus den angegebenen Größen.

a) P(1/1), m = 1	b) P(-1/-1), Q(2/0)
c) A(3/1), B(0/-2)	d) A(-1/-2), m = -2/3
e) R(0/-1), m = 2/5	f) P(-2/1), Q(4/4)

8. Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Geraden
f(x) = -x + 5 und g(x) = 0,2x – 4

9. Wie heißt die Gleichung der Parallelen zu der Geraden f(x) = 0,25x – 1, die durch den Punkt (1 / 3) geht?

10. Geben Sie die Gleichung zweier linearer Funktionen an, die bei x = 4 eine Nullstelle haben.

11. Nennen Sie die Funktionsgleichung einer Geraden, die keine Nullstelle hat.

12. Ein rechtwinkliges Dreieck hat die Eckpunkte A(-1/4) und B(7/ 1). Punkt C liegt auf der x-Achse. Berechnen Sie die Koordinaten von C unter der Voraussetzung, dass der rechte Winkel in B liegt.

13. Ein Parallelogramm hat die Eckpunkte A(1/1), B(7/2), C(5/5) und D.
a) Zeichnen Sie das Parallelogramm und bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D.
b) Bestimmen Sie die Gleichungen der Geraden für alle vier Seiten.
c) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Diagonalen.

14. Bestimmen Sie den Abstand der beiden Punkte A und B voneinander
a) A(3/9), B(-4/7) b) A(-3,5/-6), B(4,2/1,3)

15. Gegeben ist der Gerade mit der Funktionsgleichung f(x) = 0,25x –3.
Berechnen Sie den Abstand der Punkte A(-1/-6) und B(3/2) von dieser Geraden.
Fertigen Sie dazu eine Lösungsskizze an.

16. Das Taxiunternehmen Blitz verlangt eine Pauschale von 3,00 Euro und 1,20 Euro pro gefahrenen Kilometer. Das Konkurrenzunternehmen Meier will keine Pauschale aber 1,45 Euro pro Kilometer. Fertigen Sie eine aussagefähige Skizze an und geben Sie eine Empfehlung für die Kunden.

17. Bei Autoreifen nimmt die Profiltiefe im Laufe der Zeit kontinuierlich ab. Bei einem Fahrzeug betrug das Profil nach 20 000 km noch 4 mm, nach 32 000 km noch 3 mm.
a) Wie lange kann das Fahrzeug noch mit diesen Reifen fahren, wenn die vorgeschriebene Profiltiefe 1 mm beträgt?
b) Um wie viele mm nimmt die Profiltiefe pro 10 000 km ab?

Aufgaben zu Kapitel 3

1. Zeichnen Sie die Graphen der quadratischen Funktionen in ein Achsenkreuz mit geeigneter Einteilung und bestimmen Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes.

a) $f(x) = 0{,}1x^2$	b) $f(x) = 2x^2 - 5$
c) $f(x) = (x - 4)^2$	d) $f(x) = x^2 + 4x + 1$

2. Bestimmen Sie den Funktionswert an der genannten Stelle

a) $f(x) = x^2 - 3x + 5$	$f(2) =$
b) $f(x) = 3x^2 - 2{,}5x + 5$	$f(-2) =$
c) $f(x) = -0{,}2x^2 + 9x - 3$	$f(12) =$
d) $f(x) = 1{,}2x^2 - 3x + 1{,}5$	$f(1/4) =$

3. Bestimmen Sie die x-Werte für die genannten Funktionswerte

a) $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 4$	$f(x) = 12$	$x_1 =$	$x_2 =$
b) $f(x) = -4x^2 + 12x - 7$	$f(x) = -17$		
c) $f(x) = x^2 - 3x - 2{,}75$	$f(x) = -5$		
d) $f(x) = 0{,}25x^2 + 3x + 4$	$f(x) = -1$		

4. Berechnen Sie die Nullstellen (Schnittpunkte mit der x-Achse)

a) $f(x) = 0{,}25x^2 + 3x + 5$
b) $f(x) = -3x^2 - 4x + 1$
c) $f(x) = 12x^2 + 0{,}125x - 4$

5. Berechen Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes

a) $f(x) = x^2 + 2{,}4$	c) $f(x) = -0{,}5x^2 + 12{,}5$	e) $f(x) = x^2 - 4x + 3$
b) $f(x) = 3x^2 + 3x - 0{,}75$	d) $f(x) = x^2 + 22x + 121$	f) $f(x) = 0{,}5x^2 + 3x + 6{,}5$

6. Die beiden Graphen f(x) und g(x) schneiden sich. Skizzieren Sie die Graphen und berechnen Sie die Schnittpunkte.

   $f(x) = -0{,}75x^2 - 1{,}5x + 2{,}5$ und $g(x) = 0{,}5x - 10$

7. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der quadratischen Funktion anhand der bekannten Angaben.

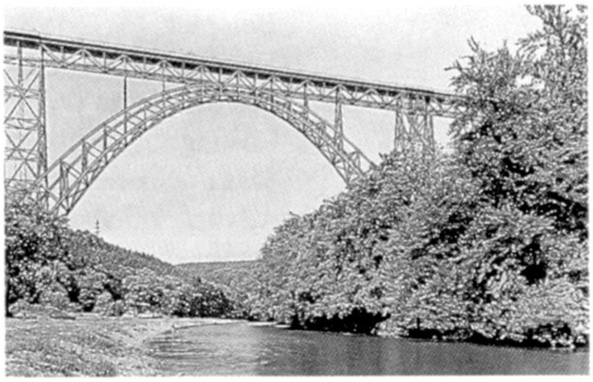
a) Scheitelpunkt (0 / - 2),	Formfaktor a = 1
b) Scheitelpunkt (-1 / - 2),	Formfaktor a = 1
c) Scheitelpunkt (-2 /3),	Formfaktor a = -2
d) Scheitelpunkt (3 / 1),	Punkt P(-3/0)
e) Scheitelpunkt (-2/-3),	Punkt Q(-1/2)

8. Von einer quadratischen Funktion sind die drei Punkte A, B und C bekannt. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

a) A(-3/0,25),	B(-1/3,25),	C(2/-3,5)
b) A(0/0,5),	B(-1/10,5),	C(1/-1,5)

9. Gegeben ist die Parabel mit der Gleichung f(x)= 0,5x²-2x-2 und die Gerade mit der Gleichung g(x) = 4x – 20.
Stellen Sie fest, ob es sich bei der Geraden um eine Sekante, Tangente oder Passante handelt.

10. Viele moderne Brücken haben die Form von Parabeln. Die Abbildung rechts zeigt die Müngstener Brücke bei Solingen aus den fünfziger Jahren. Legt man ein Koordinatensystem in den Scheitel des Bogens, so hat die Parabel die Gleichung
$y = -\frac{1}{90}x^2$.
Die Bogenhöhe beträgt 69m.
Berechne die Spannweite.



11. a) Wie weit fällt ein Stein in **freiem Fall** nach 0,1 sec, nach 0,5 sec, nach 1 sec?
Zeichne ein Diagramm für Weg (y-Achse) und Zeit(x – Achse).
b) Ein Stein, der in einen Brunnen geworfen wird, schlägt nach 2,5 sec. auf dem Wasser auf. Wie tief ist der Brunnen?
c) Wie lange braucht ein Stein, um 50 m tief zu fallen? Mit welcher Geschwindigkeit (m pro sec) schlägt er nach 50 m auf?

Zeit-Weg-Gesetz für den **freien Fall**: $s = \frac{1}{2}gt^2$ (wobei g = 9,81 $\frac{m}{s^2}$ ist)

(ohne Luftwiderstand) $v = gt$ (s = Strecke in m, t = Zeit in Sekunden)
v = Geschwindigkeit

5. Anhang

Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen

Unter einer quadratischen Gleichung versteht man eine Gleichung, bei der die Unbekannte x in der 2. Potenz vorkommt.

Allgemein: $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$

Beispiele für quadratische Gleichungen:

$x^2 + 3x = 0$, $2x^2 - 4{,}5x = 9$, $0{,}5x^2 = 7$, $2x^2 + 7x = 0$

Eine quadratische Gleichung kann zwei, eine oder gar keine Lösung besitzen.

Bsp.: $x^2 - 4 = 0$ zwei Lösungen: $\underline{x_1 = 2,}$ $\underline{x_2 = -2}$

$x^2 = 0$ eine Lösung: $\underline{x = 0}$

$x^2 = -3$ keine Lösung

Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen

1. <u>Wurzelziehen</u> (Gleichungen in der Form $ax^2 + c = 0$)

$2x^2 - 6 = 0 \quad | +6$

$2x^2 = 6 \quad | :2$

$x^2 = 3 \quad | \pm\sqrt{\ }$

$x_1 = \sqrt{3}$ $\quad x_2 = -\sqrt{3}$

2. <u>Ausklammern</u> (Gleichungen in der Form $ax^2 + bx = 0$)

$2x^2 + 4x = 0 \quad |$ 2x ausklammern

$2x(x + 2) = 0$

$x_1 = 0$ $\quad x_2 = -2$

3. <u>Quadratische Ergänzung</u> (Gleichungen in der Form $ax^2 + bx + c = 0$)

$2x^2 - 5x + 3 = 0 \quad | :2$

$x^2 - 2{,}5x + 1{,}5 = 0 \quad | -1{,}5$

$x^2 - 2{,}5x = -1{,}5 \quad | +1{,}25^2$ (quadratische Ergänzung)

$x^2 - 2{,}5x + 1{,}25^2 = -1{,}5 + 1{,}5625$

$(x - 1{,}25)^2 = 0{,}0625 \quad | \pm\sqrt{\ }$

$x - 1{,}25 = \pm 0{,}25 \quad | +1{,}25$

$x_{1,2} = \pm 0{,}25 + 1{,}25$

$x_1 = 1{,}5$ $\quad x_2 = 1$

4. Lösen mit Hilfe von Formeln

Bsp.: $0{,}5x^2 + 5x - 2 = 0$

a) die p-q-Formel

$$\boxed{x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

$0{,}5x^2 + 5x - 2 = 0$

$x^2 + 10x - 4 = 0$

p = 10, q = -4

$$x_{1,2} = -5 \pm \sqrt{25+4}$$

$$x_{1,2} = -5 \pm \sqrt{29}$$

$x_1 = 0{,}38516$... $x_2 = -10{,}38516$...

b) die a-b-c-Formel

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

a=0,5, b=5, c= -2

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+4}}{1}$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{29}}{1}$$

$x_1 = 0{,}38516$... $x_2 = -10{,}38516$...

Die Lösungsverfahren 3 und 4 können für jede quadratische Gleichung angewendet werden. Für die beschriebenen Sonderformen zu 1 und 2 empfiehlt es sich, die Verfahren 1 und 2 anzuwenden, da diese weniger rechenintensiv sind.

Übungen: Löse die quadratischen Gleichungen mit dem günstigsten Verfahren

1) $3x^2 - 5 = 0$

2) $0{,}5x^2 + 4x = 0$

3) $0{,}75x^2 = 9$

4) $5x^2 - 15x = 0$

5) $x^2 + 0{,}5x - 3 = 0$

6) $3x^2 + 1{,}5x - 9 = 0$

7) $0{,}2x^2 + 2x - 1{,}5 = 0$

8) $x^2 - 6x + 9 = 0$

9) $2x^2 - 5x + 8{,}5 = 0$

10) $4x^2 - 12x = 25$

11) $3x^2 = 9x - 4$

12) $(x - 1{,}5)^2 = 2$

13) $2{,}4x^2 + 1{,}2x = 0$

14) $-3 + 1{,}5x^2 = 1{,}5$

Zur Kontrolle sind hier die Lösungspaare aller Aufgaben auf zwei Dezimalstellen gerundet aufgeführt. Allerdings nicht in der richtigen Reihenfolge. Schreibe zu den Lösungspaaren jeweils die richtige Aufgabennummer.

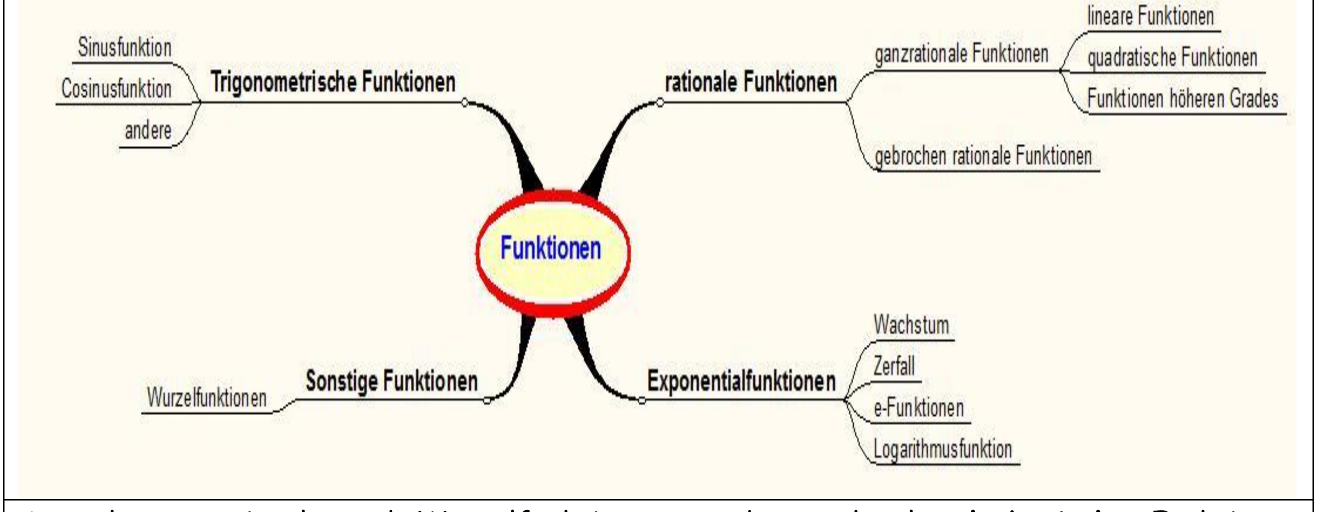
x_1	3	2,46	1,73	1,29	0	4,42	1,5	-	0	1,5	0	3,46	0,70	2,91
x_2	3	0,54	-1,73	-1,29	-8	-1,42	-2	-	-0,5	-2	3	-3,46	-10,70	0,09
Aufgabe														

F U N K T I O N E N

Funktionale Zusammenhänge

1. Überblick über die Funktionstypen

Merkmal einer Funktion:
Y heißt eine Funktion, wenn zu jedem x-Wert eindeutig ein y-Wert zugeordnet ist.



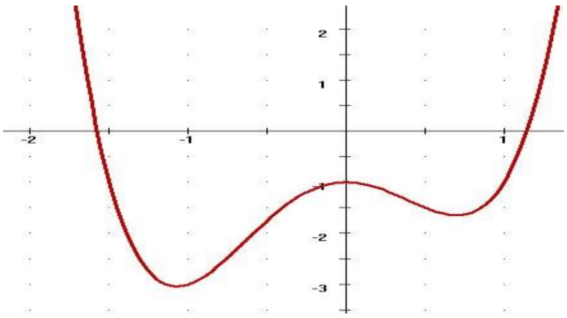
<u>Anmerkung:</u> rationale und Wurzelfunktionen werden auch als **algebraische** Funktionen bezeichnet, da sich die Funktionsgleichung durch algebraische Ausdrücke (+, - , *, : beschreiben lässt.
Alle anderen Funktionen, die sich nicht durch Gleichungen beschreiben lassen, werden als **transzendente** Funktionen bezeichnet.

Es wird mit den Funktionen höheren Grades begonnen, da lineare und quadratische Funktionen bereits im ersten Kapitel behandelt wurden.

2. Funktionen höheren Grades

Die Funktion $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 4$ nennt man ein Funktion 3. Grades, weil der höchste Exponent von x die Zahl 3 ist. Analog wäre die Funktion $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 5x - 1$ eine Funktion 4. Grades usw. Ausdrücke, die wie oben, die aus mehreren Termen bestehen, bezeichnet man auch **Polynome**. Dabei gibt der höchste Exponent den Grad des Polynoms an.

Die Schaubilder solcher Funktionen kann man Parabeln höherer Ordnung nennen. Diese Kurven verlaufen meist unregelmäßig und können mehrere Scheitelpunkte besitzen.



2.1. Aussagen über Funktionen höheren Grades

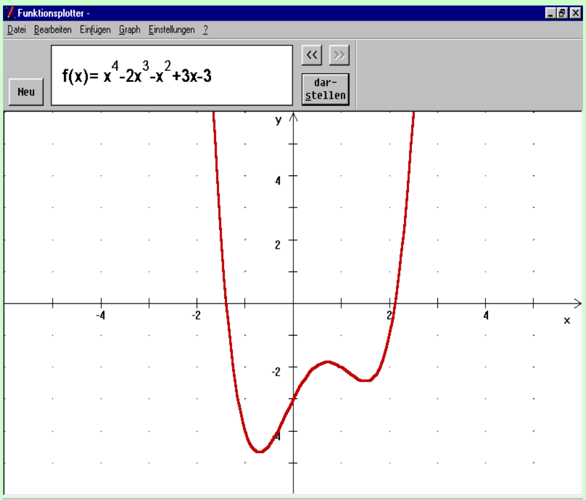
Trotz der genannten Unregelmäßigkeiten kann man folgende Regeln aufstellen:

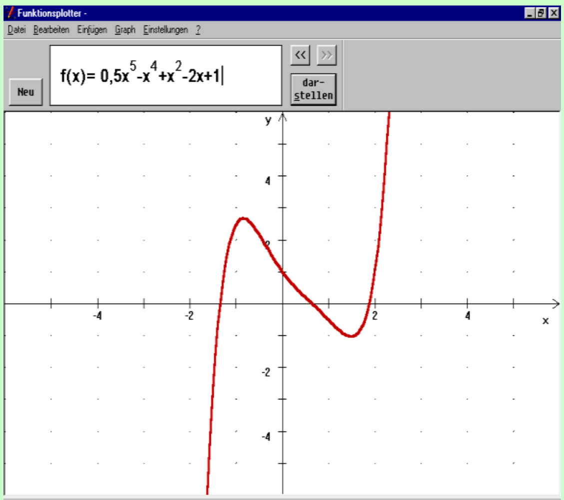
Eigenschaften ganzrationaler Funktionen

A. Graphenenden

1. Die Graphenenden von Funktionen, bei denen der **höchste Exponent gerade** ist, zeigen in die **gleiche Richtung**

2. Die Graphenenden von Funktionen, bei denen der **höchste Exponent ungerade** ist, zeigen in **entgegengesetzte Richtung**



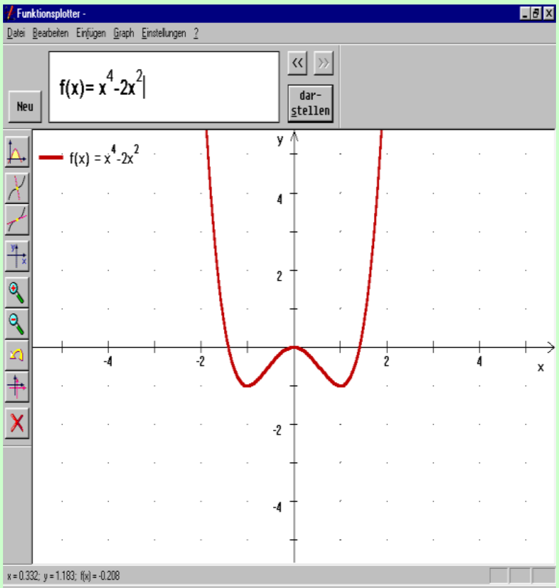


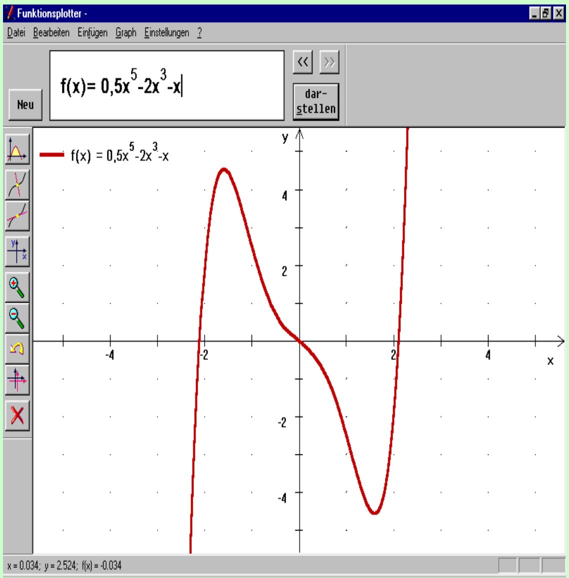
Eigenschaften ganzrationaler Funktionen

B. Symmetrie

1. Funktionen mit nur geraden Exponenten sind **achsensymmetrisch**

2. Funktionen mit nur ungeraden Exponenten sind **punktsymmetrisch**



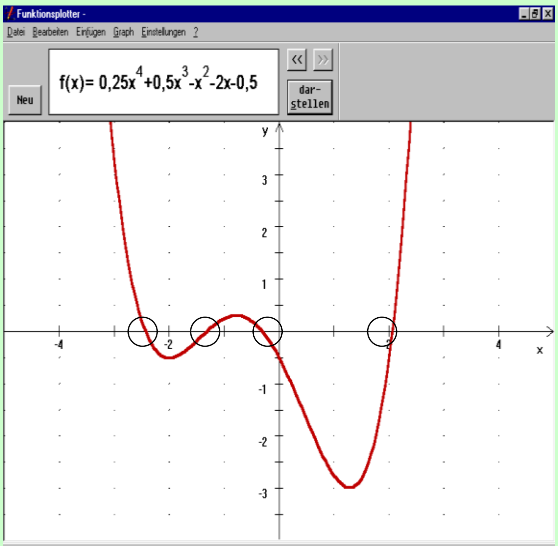


Eigenschaften ganzrationaler Funktionen

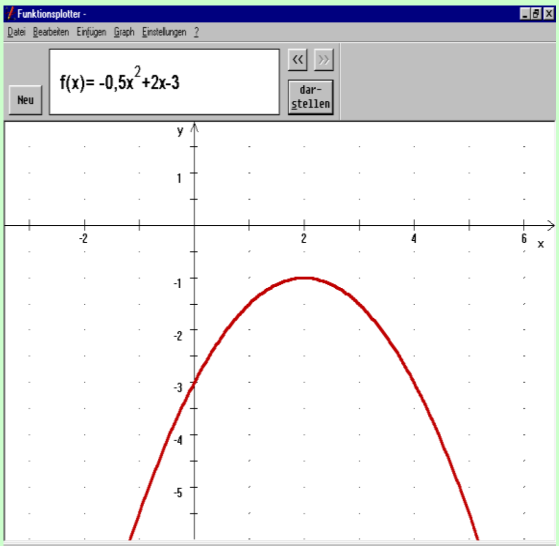
C. Nullstellen

Eine Funktion vom Grad **n** hat höchstens **n** Nullstellen

Beispiel: 4 Nullstellen, Funktion 4. Grades



Beispiel: Keine Nullstellen, Funktion 2. Grades

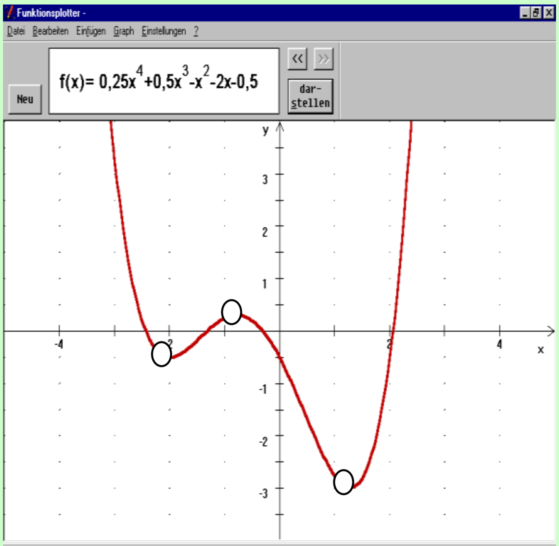


Eigenschaften ganzrationaler Funktionen

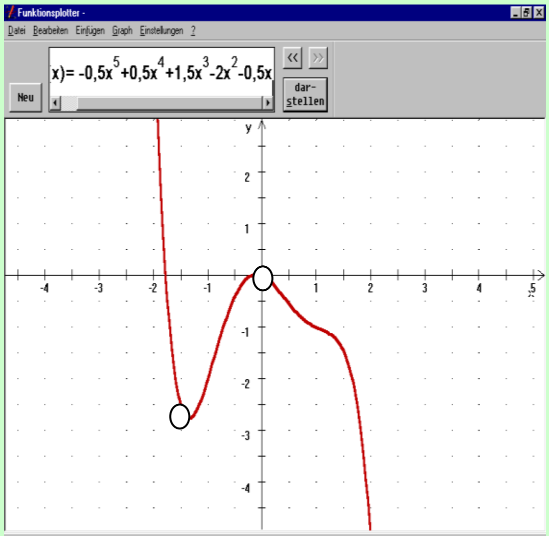
D. Extremwerte

Eine Funktion vom Grad **n** hat höchstens **n-1** Extremwerte

Beispiel: 3 Extremwerte, Funktion 4. Grades



Beispiel: 2 Extremwerte, Funktion 5. Grades

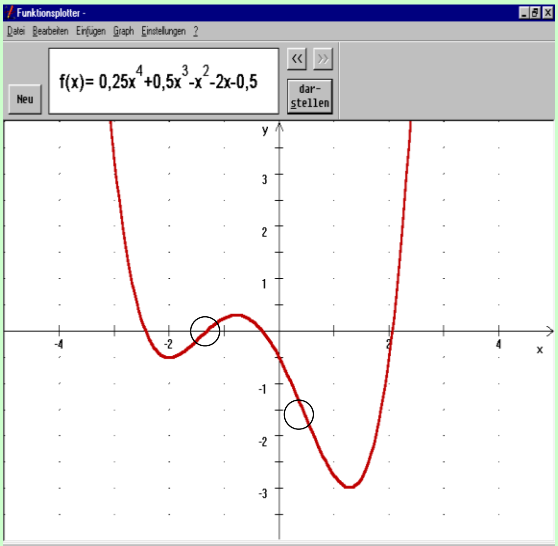


Eigenschaften ganzrationaler Funktionen

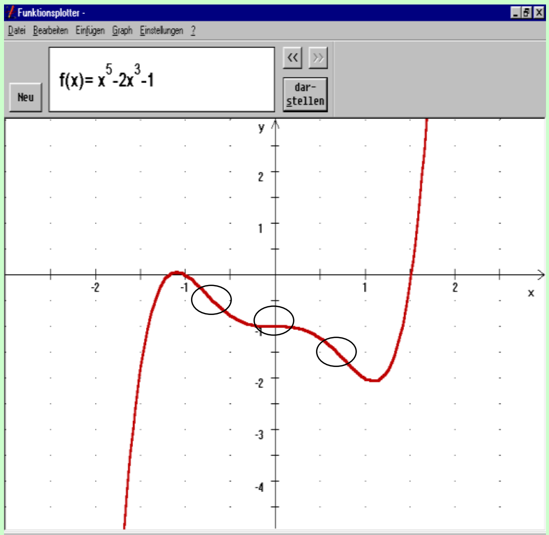
E. Wendepunkte

Eine Funktion vom Grad **n** hat höchstens **n-2** Wendepunkte

Beispiel: 2 Wendepunkte, Funktion 4. Grades



Beispiel: 3 Wendepunkte, Funktion 5. Grades



2.2 Die Berechnung der Nullstellen

Die wichtigste Aufgabenstellung im Zusammenhang mit Funktionen wird es immer wieder sein, ihre Nullstellen zu berechnen. Mit Hilfe der Nullstellenberechnung werden wir später bei der Differentialrechnung in der Lage sein, besondere Punkte, wie Extremwerte oder Wendepunkte zu berechnen.
Die Berechnung der Nullstellen führt immer zu der Gleichung f(x) = 0. Für lineare und quadratische Gleichungen lässt sich diese Rechnung algebraisch lösen. Für Funktionen höheren Grades gibt es meist keinen algebraischen Lösungsweg. In diesem Fall müssen so genannte numerische oder Näherungsverfahren angewendet werden.
Die einzelnen Lösungsverfahren werden ausführlich im Skript zum Thema Nullstellen dargestellt.

2.3 Berechnen von Funktionswerten mit dem Hornerschema

Für zusammengesetzte Funktionen höheren Grades ist die Berechnung von Funktionswerten recht rechenaufwändig, wenn man nicht über einen geeigneten Taschenrechner verfügt. Zur Vereinfachung kann man ein nach William Horner benanntes Schema anwenden, welches nach einiger Übung sehr schnell die gesuchten Funktionswerte liefert.

Beispiel: Berechne f(2) der Funktion $f(x) = 3x^3 - 18x^2 + 36x + 36$

Die Koeffizienten der Funktionsgleichung werden nebeneinander geschrieben. Fehlt ein Exponent, wird eine 0 eingetragen.

3	-18	36	36

Unter den ersten Koeffizienten wird ein 0 geschrieben. Die beiden übereinanderliegenden Zahlen werden addiert und anschließend mit dem gewünschten x-Wert (hier: 2) multipliziert.

	3	-18	36	36
	0			
x=2	3			

Das Ergebnis der Multiplikation (hier: 6) wird unter den zweiten Koeffizienten geschrieben. Dieser Vorgang wird bis zur letzten Spalte wiederholt.

	3	-18	36	36	
	0	6	-24	24	Das Ergebnis der letzten Addition ist
x=2	3	-12	12	**60**	der gesuchte Funktionswert an der Stelle x = 2

Beispiel 2: Berechne f(3) für $f(x) = 0{,}5x^4 - 3x^2 + 2x - 5$

	0,5	0	-3	2	-5	Beachte die 0 für x^3
	0	1,5	4,5	4,5	19,5	
x =3	0,5	1,5	1,5	6,5	**14,5**	14,5 ist der gesuchte Funktionswert

2.4 Bestimmen von Funktionsgleichungen anhand bekannter Punkte

Aufgaben, bei denen eine Funktionsgleichung bestimmt werden soll, wenn die Koordinaten einiger Punkte bekannt sind, können wir mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems lösen, wenn bekannt ist, von welchem Grad die gesuchte Funktionsgleichung ist.

Beispiel:

Gesucht ist eine Funktion 4. Grades, die durch die Punkte A(-2/1), B(-1/-5), C(1/1), D(2/13) und E(0/-1) geht.

Die allgemeine Gleichung lautet: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Einsetzen der Koordinaten der fünf Punkte in die allgemeine Gleichung:

A(-2/1)	(1)	$1 = 16a - 8b + 4c - 2d + e$
B(-1/-5)	(2)	$-5 = a - b + c - d + e$
C(1/1)	(3)	$1 = a + b + c + d + e$
D(2/13)	(4)	$13 = 16a + 8b + 4c + 2d + e$
E(0/-1)	(5)	$-1 = e$

Nach Auflösung des Systems erhält man $a = 1, b = 0, c = -2, d = 3, e = -1$

Die gesuchte Funktionsgleichung lautet $\mathbf{f(x) = x^4 - 2x^2 + 3x - 1}$

3. Gebrochen rationale Funktionen

Eine Funktion f, bei der die Variable x im Nenner eines Bruches steht, heißt gebrochen rationale Funktion. Beispiel: $\boxed{f(x) = \frac{1}{x^n}}$

Die Graphen dieser Funktionen werden als **Hyperbeln** bezeichnet. Der Graph ist keine durchgezogene Kurve, sondern besteht aus mehreren Teilgraphen.
Zu beachten ist der **Definitionsbereich** der Funktion. Gebrochen rationale Funktionen sind für solche Zahlen nicht definiert, bei deren Einsetzen für x der Nenner den Wert 0 annimmt. An diesen Stellen kann man den Graphen nicht zeichnen. Es entsteht entweder ein **Pol** oder eine **Lücke**.
An einer **Polstelle** nähern sich die Graphenenden immer mehr einer Geraden, die man **senkrechte Asymptote** nennt. Bei einer Lücke hat der Graph an einer bestimmten Stelle ein Loch.
Für x → $\pm\infty$ kann es **waagerechte Asymptoten** geben, die entweder die x-Achse selbst oder eine Parallele zur x-Achse sind.
Für das Aussehen und die Eigenschaften einer Hyperbel ist im Wesentlichen der Grad des Zähler und der Grad des Nenners verantwortlich. Es gibt drei Möglichkeiten:

a)	Zählergrad < Nennergrad	→ echt gebrochen rationale Funktion
b)	Zählergrad = Nennergrad	→ unecht gebrochen rationale Funktion
c)	Zählergrad > Nennergrad	→ unecht gebrochen rationale Funktion

Regeln für den Umgang mit gebrochen-rationalen Funktionen

a) Bestimmen des **Definitionsbereiches**: Für welche x-Werte hat der Nenner den Wert 0. Diese Zahlen gehören nicht zum Definitionsbereich.

b) **Nullstellen**: Nullstellen einer Hyperbel ergeben sich durch Nullsetzen des Zählers

c) **Definitionslücken**:
aa) Nenner = 0 und Zähler <>0: Die Definitionslücke bildet einen Pol.
ab) Nenner = 0 und Zähler = 0: Es existiert eine Lücke im Graphen

d) **Asymptoten** (Verhalten für x → $\pm\infty$)
da) Zählergrad < Nennergrad: x-Achse ist Asymptote
db) Zählergrad = Nennergrad: Eine Parallele zur x-Achse ist Asymptote
dc) Zählergrad > Nennergrad: Schräge Asymptote oder Kurve als Asymptote

Für die Berechnung der Asymptotengleichung im Fall bc) führt man eine Polynomdivision (Zähler durch Nenner) durch. Das Ergebnis ist ein ganzrationaler Teil und ein gebrochener Teil. Der ganzrationale Teil ist die Funktionsgleichung der Asymptote.

Bsp: $f(x) = \frac{x^2+2}{x-3}$ Durch Polynomdivision ergibt sich:

$$
\begin{array}{l}
(x^2 + 2) : (x - 3) = x + 3 + \frac{11}{x-3} \\
\underline{-(x^2 - 3x)} \\
\quad 3x + 2 \\
\quad \underline{-(3x - 9)} \\
\qquad 11
\end{array}
$$

Damit lautet die Gleichung der Asymptote **f(x) = x + 3**

Einige Beispiele:

Beispiele mit x-Achse als Asymptote und **Zählergrad < Nennergrad**

$f(x) = \frac{1}{x}$ $f(x) = \frac{1}{x^2}$

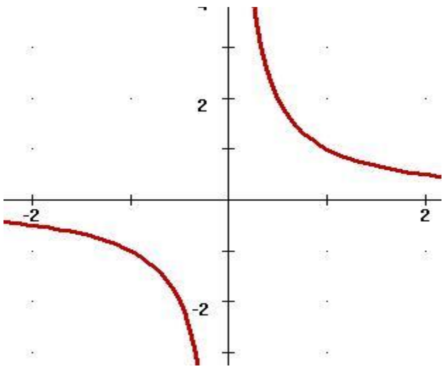
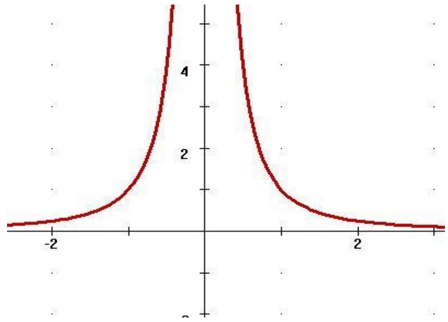


Bild 1 links

Bild 2 rechts



$f(x) = \frac{1}{x-3}$ $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$

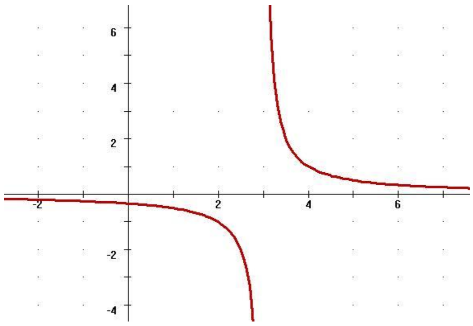
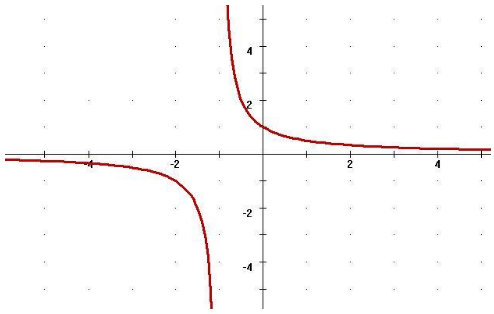


Bild 3 links

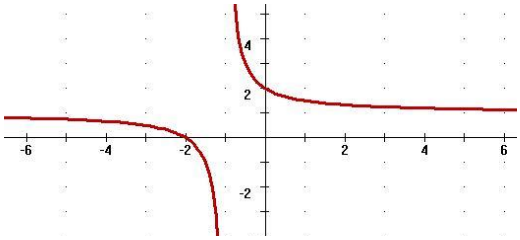
Bild 4 rechts



Pol mit Vorzeichenwechsel bei x = -1 und
Lücke bei x = 1

Zählergrad = Nennergrad

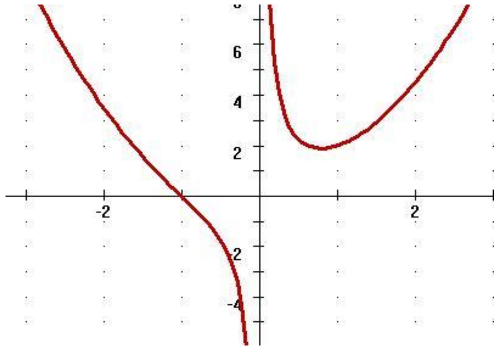
f(x) = $\frac{x+2}{x+1}$



Waagerechte Asymptote bei y = 1
Pol (senkrechte Asymptote) bei x = -1

Zählergrad > Nennergrad

f(x) = $\frac{x^3+1}{x}$

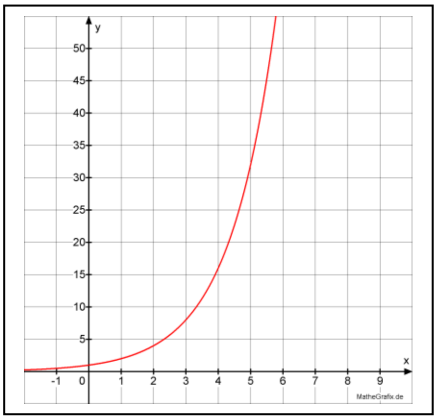


Pol bei x = 0 sowie
die Parabel x^2 als Asymptote

4. Exponentialfunktionen $f(x) = b^x$

Eine Funktion f mit $f(x) = b^x$ heißt Exponentialfunktion.

Das Besondere bei den Exponentialfunktionen ist die Variable x als Exponent mit fester Basis b.



Beispiel:
Mit Hilfe der Exponentialfunktion f mit **$f(x) = 2^x$** kann z.B. die Anzahl der Bakterien eines Stammes beschrieben werden, die sich durch Zellteilung innerhalb einer Zeiteinheit verdoppelt. Siehe Schaubild rechts.

Eigenschaften

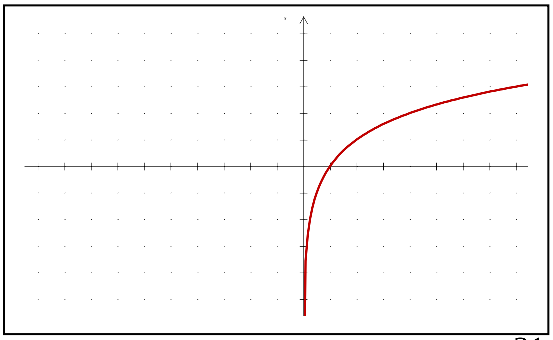
- Alle Exponentialfunktionen verlaufen oberhalb der x-Achse.
- Alle Exponentialfunktionen der Form $f(x) = b^x$ schneiden die y-Achse im Punkt (0/1), da jede Potenz mit dem Exponenten 0 den Wert 1 hat.
- Der Definitionsbereich aller Exponentialfunktionen sind alle reellen Zahlen
- Für b > 1 wachsen die Funktionswerte ins Unendliche, für 0 < b < 1 streben die Funktionswerte der x-Achse zu (Grenzwert ist 0).

Beispiele:
1. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 1{,}5^x$. Berechne den Funktionswert an der Stelle 3. Lösung: $1{,}5^3 = 3{,}375$
2. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 0{,}8^x$. Berechne f(4)und f(10). Lösung: $0{,}8^4 = 0{,}4096$, und $0{,}8^{10} = 0{,}1073\ldots$.
3. Eine Exponentialfunktion geht durch den Punkt (3/27). Wie heißt die Funktionsgleichung? Ansatz: $b^3 = 27$ → $\sqrt[3]{27} = 3$ also: $f(x) = 3^x$

5. Die Logarithmusfunktion

Eine Funktion der Form $f(x) = \log_b x$ heißt Logarithmusfunktion zur Basis b.
Der Funktionswert der Logarithmusfunktion gibt an, welcher Exponent der Basis zugeordnet werden muss, damit ein bestimmter x-Wert entsteht. Wir erhalten diese Funktion, wenn wir die Exponentialfunktion $f(x) = b^x$ nach x auflösen.

Beispiel:
Der Graph der Logarithmusfunktion:
$f(x) = \log_2 x$



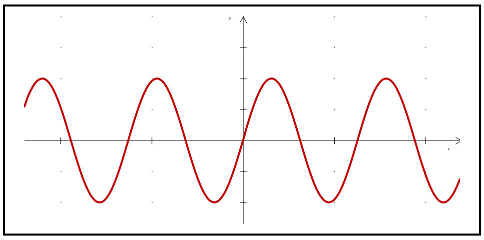
Der Logarithmus ist diejenige Zahl, mit der man die Basis potenzieren muss, um eine gewünschte Zahl zu erhalten.
Der Logarithmus von 8 zur Basis 2 ist 3, da $2^3 = 8$

6. Trigonometrische Funktionen

Trigonometrische Funktionen (Winkelfunktionen) haben bedeutende Anwendungsmöglichkeiten in der Technik und in den Naturwissenschaften, z.B. in der Elektrotechnik, in der Optik, in der Akustik oder auch in der Medizin. Viele Erscheinungen in der Natur sind sich periodisch wiederholende Vorgänge (z.B. der Schall, die Bewegung des Herzmuskels), die mit Hilfe von trigonometrischen Funktionen erfasst und untersucht werden können.

Die Sinusfunktion

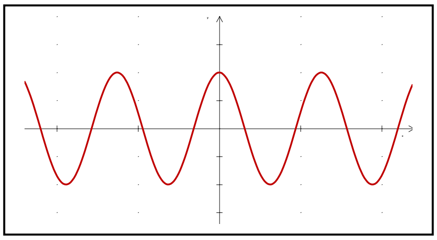
f(x) = sin x.



$$Sinus = \frac{Gegenkathete}{Hypothenuse}$$

Die Kosinusfunktion

f(x) = cos x

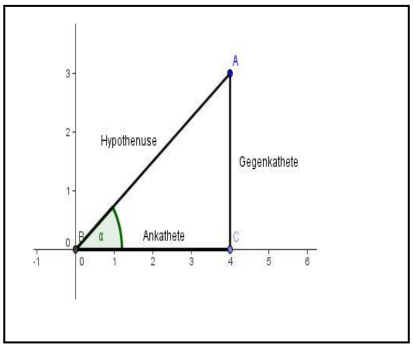


$$\cos inus = \frac{Ankathete}{Hypothenuse}$$

Zur Steigungsberechnung verwendet man den **Tangens**.

$$Tangens = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$$

Der Tangens entspricht dem Steigungsmaß m, welches durch den Quotienten $m = \frac{\Delta Y}{\Delta X}$ ausgedrückt wird.



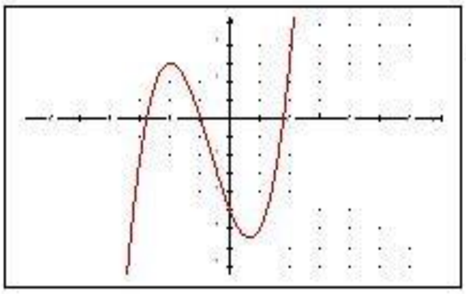
7. Aufgaben

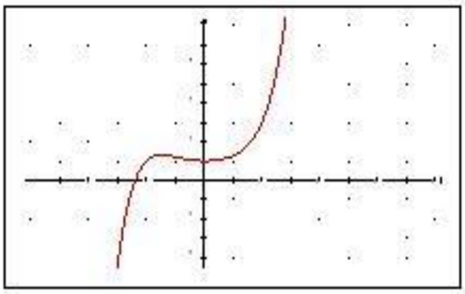
Aufgaben zu Kapitel 2
(Aufgaben zum Thema Nullstellen befinden sich im Skript über Nullstellen)

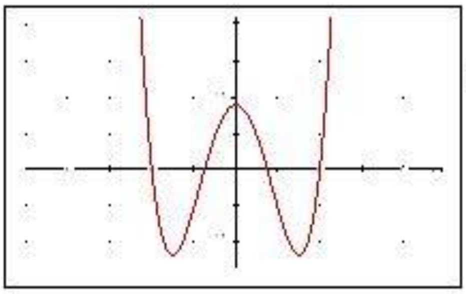
1. Erstellen Sie eine Wertetabelle und zeichnen Sie den Graphen!
   a) $f(x)=x^4-8x^2+10$
   b) $f(x)=x^3-3x^2+2x$
   c) $f(x)=x^4+5x^3+5x^2-5x-6$
   d) $f(x)=0{,}1x^5-0{,}2x^4-0{,}5x^3+2x^2$

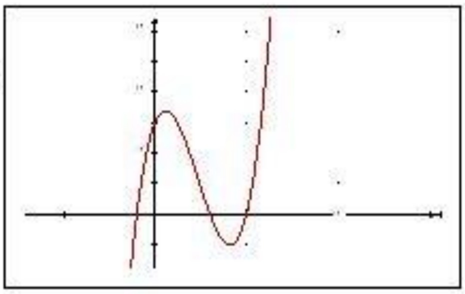
2. Welches Schaubild gehört zu welcher Funktionsgleichung. Begründen Sie!

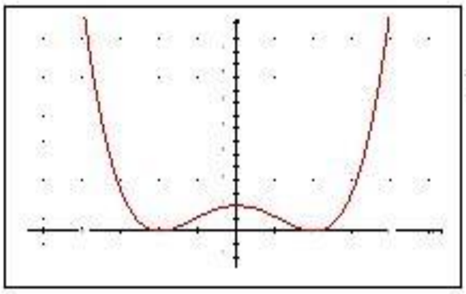
a) $f(x) = x^3 -7x^2 + 7x + 15$
b) $f(x) = 2x^3-8x$
c) $f(x) = x^5 + x^2 + 1$
d) $f(x) = x^4 + 6x^3 + 9x^2$
e) $f(x) = (x^2 - 1)^2$
f) $f(x) = 4x^4 – 18{,}25x^2 + 9$
g) $f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x$
h) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x -5$

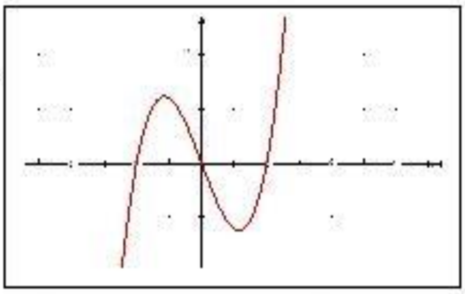

A

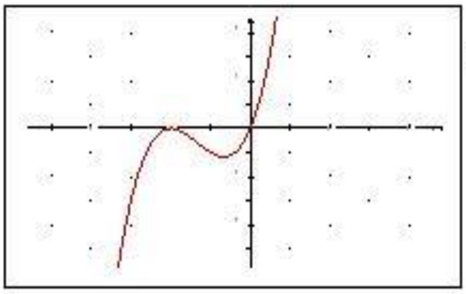
B


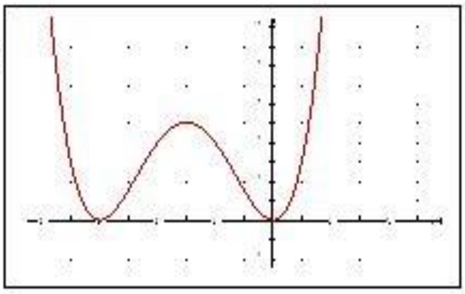

C

D



E

F



G

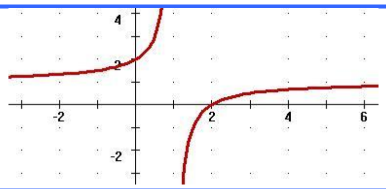
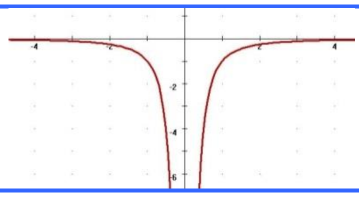
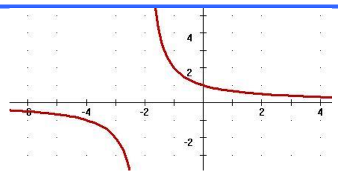
H


Aufgaben zu Kapitel 3

1. Ermitteln Sie für die folgenden Funktionen den Definitionsbereich, die Nullstellen und die Pole bzw. Lücken.

a) $f(x)=\frac{3}{x-2}$	b) $f(x)=\frac{-x}{x^2}$	c) $f(x)=\frac{2x^2-5}{x^2+6}$	d) $f(x)=\frac{3x+4}{x-2}$

2. Welcher Term gehört zu welcher Funktion. Begründen Sie die Entscheidung.

(1) $f(x)=-\frac{1}{x^2}$	(2) $f(x)=\frac{2}{x+2}$	(3) $f(x)=\frac{x-2}{x-1}$
		

3. Bestimmen Sie die Gleichung der Asymptote:

a) $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$ b) $f(x)=\frac{1}{x^2-4}$ c) $f(x)=\frac{x^2-16}{x-4}$ d) $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$

aus der Betriebswirtschaft:

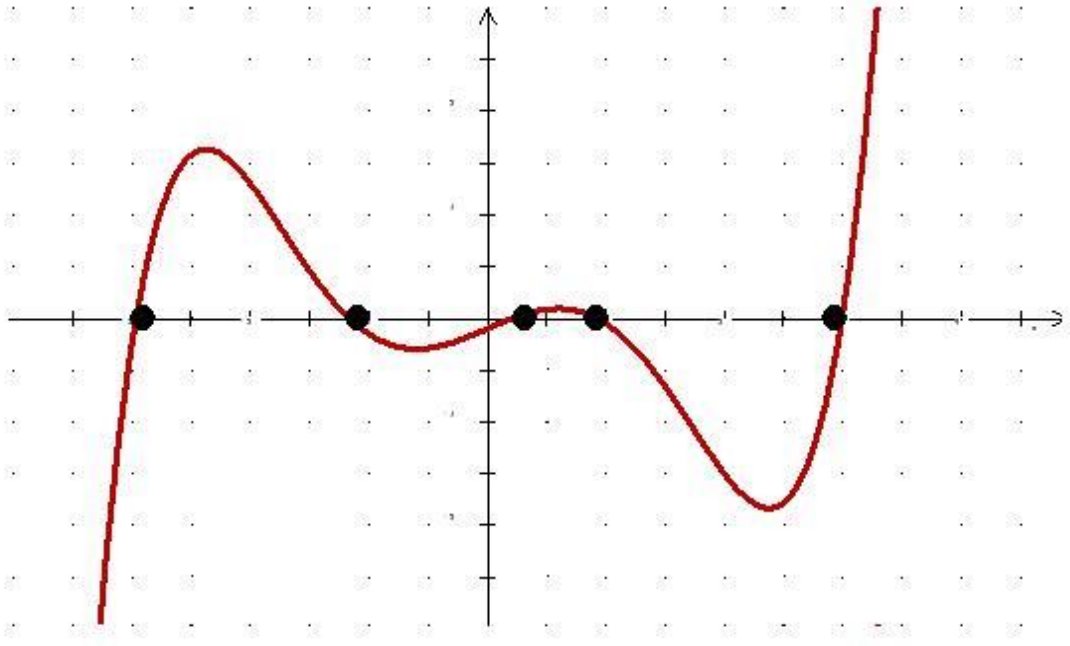
4. Die Kostenfunktion für die Herstellung eines Bauteils lautet K(x) = $0{,}5x^3 - 3x^2 + 8x + 5$.
   a) Zeichnen Sie den Funktionsgraphen in ein Koordinatenkreuz übersichtlich im Bereich 0 bis 5.
   b) Die Stück- oder Durchschnittskostenfunktion ist eine gebrochen rationale Funktion. Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Funktion bestimmen Sie den Punkt mit den niedrigsten Stückkosten.

Aufgaben zu Kapitel 4

1. Zeichnen Sie die Graphen mit der Funktionsgleichung
   a) $f(x) = 2^x$ b) $f(x) = -2^x$ c) $f(x) = 0{,}5^x$ d) $f(x) = 2^{-x}$

2. Der Graph einer Exponentialfunktion mit $f(x)= a^x$ geht durch den Punkt
   a) P(1/3), b) P(1/0,25)
   Bestimmen Sie die Funktionsgleichung

Nullstellen als zentrales Thema der Analysis

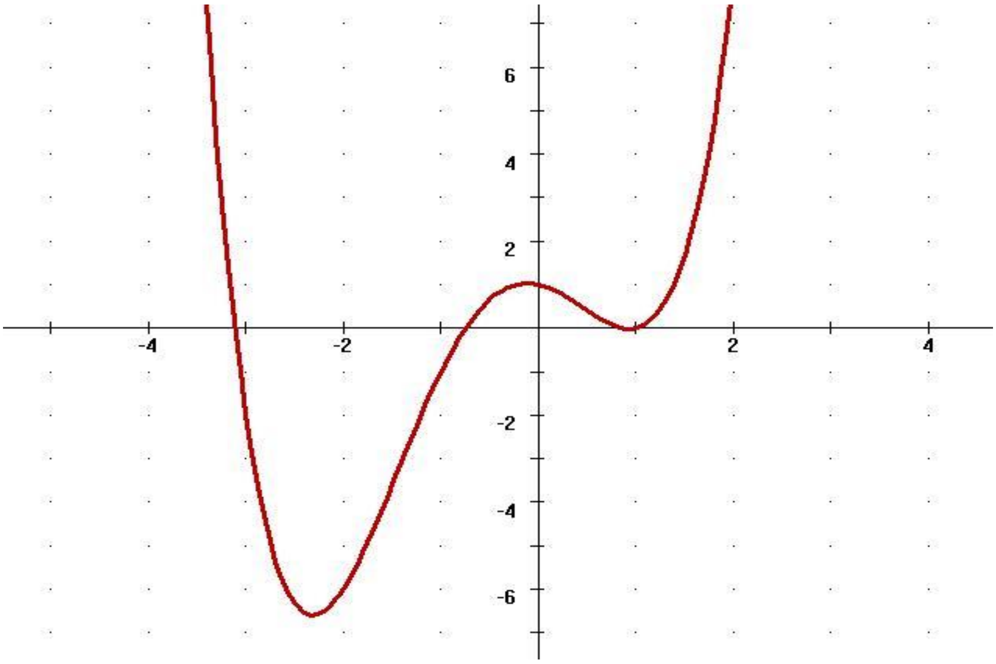


Inhalt

1. Problemstellung

Beispiel

Die Funktion $f(x)=0{,}5x^4 + x^3 - 2x^2 - 0{,}5x + 1$ besitzt vier Nullstellen.
Berechnen Sie diese auf vier Dezimalstellen genau.



Als Nullstellen bezeichnet man Punkte, an denen eine Funktion den Wert Null annimmt.
Die algebraische Formulierung einer Nullstelle lautet also $f(x)= 0$.

Graphisch sind Nullstellen Punkte, an denen ein Graph die x-Achse schneidet oder berührt. Rechnerisch erhalten wir die Nullstellen, indem wir die Funktionsgleichung gleich Null setzen und nach x auflösen.

Die Berechnung von Nullstellen hat in der Mathematik eine große Bedeutung.

Nullstellen sind Schwellenwerte, d.h. Punkte, an denen ein Übergang vom negativen zum positiven Bereich stattfindet. In der Betriebswirtschaft kann man mit Hilfe der Nullstellenberechnung etwa die Gewinnschwelle bestimmen; das ist die Menge, bei der ein Betrieb den Sprung von der Verlustzone in die Gewinnzone schafft.

In der Differentialrechnung kann man Maximal- oder Minimalstellen einer Funktion (Hoch- oder Tiefpunkte eines Graphen) mit Hilfe der Nullstellenberechnung finden. In der Betriebswirtschaft lassen sich dadurch etwa gewinnmaximale Absatzmengen oder kostenminimale Produktionsmengen berechnen.
Auch in anderen Wissenschaften lassen sich viele mathematische Probleme durch die Berechnung von Nullstellen lösen.

Auf den folgenden Seiten wird die Berechnung von Nullstellen ganzrationaler Funktionen dargestellt.

2. Nullstellen linearer und quadratischer Funktionen

a) lineare Funktionen

Jede lineare Funktion, die nicht parallel zur x-Achse verläuft, schneidet die x-Achse einmal. D. h. sie besitzt eine Nullstelle.

Bsp.: $f(x) = 0{,}5x - 3$

Um die Nullstelle zu berechnen, setzt man f(x)=0 und löst die Gleichung nach x auf.

$0{,}5x - 3 = 0 \quad |+3$
$0{,}5x = 3 \quad |*2$
$\mathbf{x = 6}$
====

Die Nullstelle hat die Koordinaten N(6/0)

b) quadratische Funktionen

Quadratische Funktionen haben entweder zwei, eine oder keine Nullstelle. Man findet sie durch Lösen einer quadratischen Gleichung.

Bsp.: $f(x) = x^2 - 4x + 3$

$x^2 - 4x + 3 = 0$ Lösen mit p-q-Formel

$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3}$

$x_{1,2} = 2 \pm 1$

$\mathbf{x_1 = 1}$ $N_1(1/0)$

$\mathbf{x_2 = 3}$ $N_2(3/0)$

Quadratische Gleichungen lassen sich algebraisch, d.h. mit Hilfe eines rechnerischen Verfahrens oder einer Formel lösen. Beispiele für das jeweils geeignete Lösungsverfahren:

Gleichung	Verfahren	Lösung(en)
1) $x^2 - 4 = 0$	Lösen durch Wurzelziehen	x1 = 2, x2 = -2
2) $0{,}5x^2 + 2x = 0$ $x(0{,}5x+2) = 0$	Lösen durch Ausklammern	x1 = 0, x2 = -4
3) $x^2 + 6x + 9 = 0$	mit der p-q-Formel	x = -3 (nur eine L.)
4) $-0{,}5x^2 + 2x - 3 = 0$	mit der a-b-c-Formel	keine Lösung

3. Nullstellen von Funktionen vom Grad n > 2

3.1 Allgemeines

Der Grad einer Funktion oder einer Gleichung wird durch den höchsten Exponenten der Funktionsgleichung bestimmt. Gleichungen ersten oder zweiten Grades (n=1 oder n=2) ließen sich algebraisch ohne Schwierigkeiten lösen.

Für Gleichungen vom Grad 3 und höher gibt keine für die Schule geeigneten algebraischen Lösungsverfahren mehr. In diesen Fällen müssen systematische oder unsystematische Näherungsverfahren angewendet werden, wie sie in Kapitel 4 dargestellt werden.

Nur in Ausnahmefällen können Nullstellen von Funktionsgleichungen höheren Grades algebraisch berechnet werden. Dies ist möglich, wenn sich die Funktionsgleichung durch Ausklammern oder Ersetzen auf lineare und/oder quadratische Gleichungen reduzieren lässt.

3.2 Sonderfälle

<u>a) Ausklammern</u> Bsp.: $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$

$x^3 - 2x^2 - 3x = 0$

Bei Gleichungen ohne Konstante kann man x oder eine Potenz von x ausklammern. Dadurch wird die Gleichung in ein Produkt aus zwei Faktoren zerlegt.

$$x(x^2 -2x -3) = 0$$

Das Produkt besteht aus den beiden Faktoren x und x^2-2x-3.
Nach dem Satz vom Nullprodukt hat ein Produkt immer dann den Wert Null hat, wenn mindestens einer der Faktoren den Wert Null hat. In diesem Fall ist der Faktor x genau dann gleich Null, wenn x selbst den Wert 0 hat.
Damit haben wir schon eine Lösung für die Gleichung. Die zweite Lösung ergibt sich aus dem Nullsetzen des zweiten Faktors x^2-2x-3 = 0.
Das Lösen der quadratischen Gleichung ergibt $x_2 = 3$ und $x_3 = -1$.
Der Graph besitzt also drei Nullstellen an den genannten Stellen.

Zusammenfassung: $x^3 - 2x^2 - 3x = 0$ | x ausklammern

$x(x^2 - 2x -3) = 0$ | beide Faktoren Null setzen

$\mathbf{x_1 = 0}$

$\mathbf{x_2 = 3}$

$\mathbf{x_3 = -1}$ N1(-1/0); N2(0/0); N3(3/0)

Dieses Verfahren kann immer dann angewendet werden, wenn jeweils lineare oder quadratische Terme ausgeklammert werden können.

b) Substitution Bsp.: $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ → $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

In diesem Fall handelt es sich um eine sog. biquadratischen Gleichung, die nur aus geradzahligen Potenzen von x besteht.
Wir ersetzen (substituieren) x^2 durch z ($z = x^2$). Dann gilt:

$z^2 - 5z + 4 = 0$ | Lösen der quadratischen Gleichung
$z_1 = 1$
$z_2 = 4$

Da wir eine Lösung für x suchen und nicht für z, müssen wir die Substitution wieder rückgängig machen. $z = x^2$

für z_1: $1 = x^2$ | $\sqrt{\ }$
$\mathbf{x_1 = -1}$ und $\mathbf{x_2 = +1}$

für z_2: $4 = x^2$ | $\sqrt{\ }$
$\mathbf{x_3 = -2}$ und $\mathbf{x_4 = 2}$

Wir erhalten vier Nullstellen N1(-2/0), N2(-1/0), N3(1/0) und N4(2/0)

c) Polynomdivision Bsp.: $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ → $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$

Häufig gelingt es durch Ausprobieren eine ganzzahlige Lösung zu finden. In diesem Fall findet man durch Einsetzen von kleinen ganzzahligen Werten eine Lösung für $\mathbf{x_1 = 2}$.
Nach der Regel, dass ein Produkt dann den Wert Null hat, wenn mindestens ein Faktor gleich Null ist (Satz vom Nullprodukt) können wir die Gleichung jetzt in zwei Faktoren zerlegen, deren einer der Linearfaktor (x - 2) ist.

$$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x-2)(ax^2 + bx + c)$$

Das Verfahren des Ausklammerns eines Linearfaktors aus einem Polynom funktioniert im Prinzip wie das schriftliche Dividieren und wird Polynomdivision genannt. Wenn x_1 eine Nullstelle ist, darf dabei kein Rest entstehen.

$$\begin{array}{l}
(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) : (x-2) = x^2 + 4x + 3 \\
-(x^3 - 2x^2) \\
\text{---------} \\
\qquad 4x^2 - 5x \\
\qquad -(4x^2 - 8x) \\
\qquad \text{----------} \\
\qquad\qquad 3x - 6 \\
\qquad\qquad -(3x - 6) \\
\qquad\qquad \text{---------} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Der auszuklammernde quadratische Term ist $x^2 + 4x + 3$
Somit gilt: $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x-2)(x^2 + 4x + 3)$
Die beiden Lösungen für $x^2 + 4x + 3$ sind $\mathbf{x_2 = -1}$ und $\mathbf{x_3 = -3}$, der Graph besitzt die Nullstellen N1(-3/0), N2(-1/0) und N3(2/0).

4. Numerische Verfahren zur Nullstellenberechnung

Mit Ausnahme der oben dargestellten Verfahren können Nullstellen für Funktionen vom Grad 3 und höher nicht mehr exakt errechnet werden.
Wir sind dabei auf Näherungsverfahren angewiesen, die die Nullstellen mit einer gewünschten Genauigkeit systematisch berechnen. Dabei ist der Einsatz eines Computers sehr vorteilhaft, weil der Computer einen bestimmten Rechenvorgang in sehr kurzer Zeit sooft wiederholen kann, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist. Einen Rechenvorgang der immer wieder in der gleichen Weise wiederholt wird, nennt man einen Algorithmus. Näherungsverfahren, die sich einem gesuchten Wert in immer besserer Genauigkeit annähern, nennt man auch numerische Verfahren.

4.1 Anzahl der Nullstellen abschätzen

Wie wollen die Nullstellen der Funktion mit der Gleichung
$f(x) = x^3 - 9x^2 - 12x + 20$ bestimmen.
Woher können wir wissen, wie viele Nullstellen es geben kann?
Dies lässt sich leider nicht eindeutig beantworten. Eine Parabel 3. Grades kann eine, zwei oder drei Nullstellen besitzen. Es gilt aber:

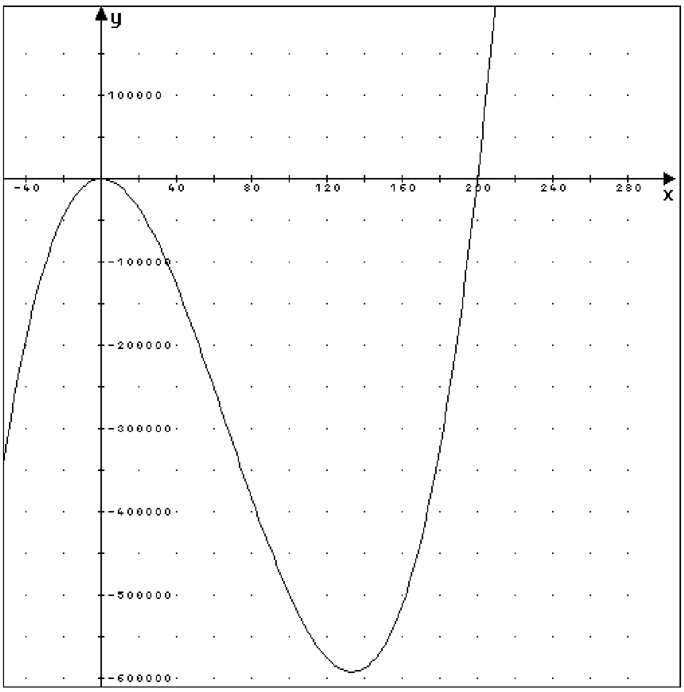
Eine Parabel vom Grad n hat höchstens n Nullstellen.

D.h. eine Funktion vierten Grades hat höchstens vier Nullstellen usw.
Einen besseren Aufschluss über die genaue Zahl der Nullstellen kann aber nur eine Skizze des Graphen geben.

4.2 Festlegen der Nullstellenintervalle

Bsp.: $f(x) = 0{,}5x^3 - 100x^2$

Wenn wir bei dieser Funktion die Anzahl der Nullstellen durch eine Skizze bestimmen wollen, so kann es passieren, dass wir nicht alle Nullstellen finden, weil wir das Intervall nicht genügend groß wählen.
So ergibt eine Intervallbreite auf der x-Achse von -10 bis +10 nur eine einzige Nullstelle bei x = 0.
Da es sich hier um einen Sonderfall handelt, bei dem wir Ausklammern können, erhalten wir $x^2(0{,}5x - 100) = 0$
Dies führt uns auf die beiden Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 200$.
Die zweite Nullstelle ist uns durch eine ungenügende Intervallbreite verloren gegangen!



Es gibt eine Möglichkeit, das Intervall, in welchem alle Nullstellen liegen, abzuschätzen. Bestimmend für das Suchintervall sind die Koeffizienten des Polynoms. Es gilt Satz 1:

Die Funktion $f(x)=x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ ist ein Polynom n-ten Grades mit den Koeffizienten a_i

Satz 1: $\boxed{K = \max(|a_i|) + 1 \quad \text{für } (0 <= i <= n-1)}$

Alle Nullstellen von f(x) liegen im Intervall [-K;K]

Das heißt im Klartext: Wenn man den Koeffizienten des Terms mit dem höchsten Exponenten ausklammert, so ergibt sich K aus dem Betrag des höchsten Koeffizienten des verbleibenden Ausdrucks vermehrt um 1.

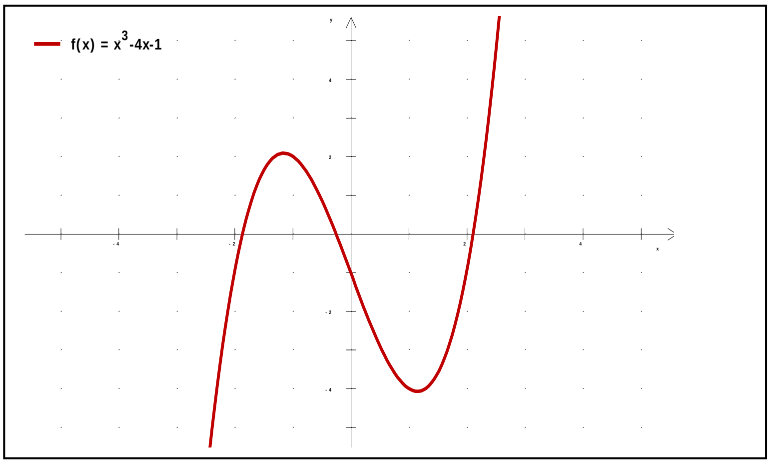
Bsp.: $f(x) = 0,5x^3 - 100x^2$ | Klammere 0,5 aus
$f(x) = 0,5(x^3 - 200x^2)$

$K = |-200| + 1 = 200 + 1 = 201$
alle Nullstellen liegen im Intervall [-201;201]
N1(0/0); N2(200/0)

Bsp.: $f(x) = 0,5x^4 - 2x^3 + 3x - 3$
$f(x) = 0,5(x^4 - 4x^3 + 6x - 6)$

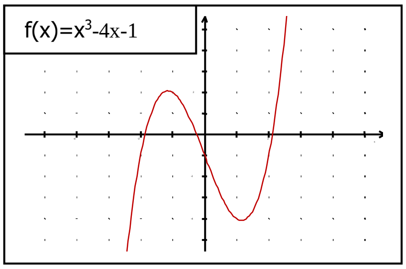
$K = |-6| + 1 = 6 + 1 = 7$
alle Nullstellen liegen im Intervall [-7;7]
N1(-1,39/0); N2(3,68/0)

Im Folgenden sollen anhand der Funktion $\mathbf{f(x) = x^3 - 4x - 1}$ vier Verfahren zur Nullstellenberechnung erläutert werden.



Nach Satz 1 gilt: K=|-4| +1 somit liegen alle Nullstellen im Intervall [-5;5].
Wir wollen die **rechte** Nullstelle des Graphen bis auf zwei Dezimalstellen genau bestimmen.

4.3 Das Verfahren der Intervallhalbierung



Anhand des Schaubildes kann man feststellen, dass die gesuchte Nullstelle zwischen x_1=2 und x_2=3 liegen muss, da die Funktionswerte von f(x_1) und f(x_2) unterschiedliche Vorzeichen haben. Mit x_1 bezeichnet man als die linke Intervallgrenze, mit x_2 die rechte Intervallgrenze.
F(x_1) = -1 und f(x_2) = 14. Es wird jetzt die Mitte des Intervalls gebildet und der Funktionswert an dieser Stelle ausgerechnet.
x = 2,5 und f(2,5) = 4,625. Da dieser Funktionswert positiv ist, liegt er rechts von der gesuchten Nullstelle. Somit kann die gesuchte Nullstelle nur zwischen x=2 und x=2,5 liegen.

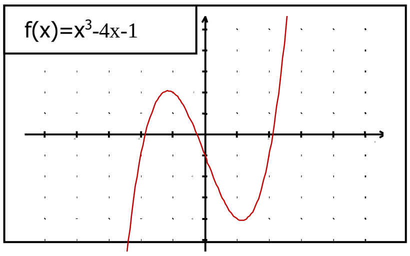
Von diesem neuen Nullstellenintervall wird wiederum die Mitte gesucht und der Funktionswert an dieser Stelle errechnet. x = 2,25 und f(2,25) = 1,390625. Da dieser Funktionswert ebenfalls positiv ist, liegt er rechts von der Nullstelle. Das neue Intervall liegt demnach zwischen 2 und 2,25

Dieses Verfahren wird nun so oft wiederholt, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist. Hier das Verfahren in 11 Durchgängen:

Nr.	Linke Grenze	Rechte Grenze	Mitte	Funktionswert
1.	2	3	2,5	4,625
2.	2	2,5	2,25	1,390625
3.	2	2,25	2,125	0,0957031
4.	2	2,125	2,0625	-0,4763184
5.	2,0625	2,125	2,09375	-0,1964417
6.	2,09375	2,125	2,109375	-0,0519142
7.	2,109375	2,125	2,1171875	0,0215068
8.	2,109375	2,1171875	2,11328135	-0,0153005
9.	2,11328135	2,1171875	2,115234425	0,0030794
10.	2,11328135	2,115234425	2,1142578885	-0,00611608
11.	2,1142578885	2,115234425		

Noch immer können wir das Ergebnis nicht genau auf zwei Dezimalstellen angeben.
Je nachdem, ob die Nullstelle näher an der linken oder rechten Grenze liegt, müssen wir auf 2,11 oder 2,12 runden..
Es kommt nicht so sehr auf die Genauigkeit der Funktionswerte an, sondern nur auf das Vorzeichen. Danach entscheidet sich, ob der errechnete Punkt links oder rechts von der gesuchten Nullstelle liegt. Natürlich nähern wir uns im Laufe der Berechnungen immer mehr dem Funktionswert 0.

4.4 Das Sekantenverfahren (Regula falsi)



Der Nachteil des Verfahrens der Intervallhalbierung liegt darin, dass man relativ viele Durchgänge benötigt, um der gesuchten Lösung nahe zu kommen. Außerdem kann es vorkommen, dass man in einem Durchgang ein schlechteres Ergebnis erhält als im vorangegangenen Durchgang.
Ein Verfahren, welches in jedem Rechendurchgang genauere Werte liefert, ist das Sekanten-verfahren. Dabei wählt man zwei Punkte (x_1/Y_1) und (x_2/Y_2) des Graphen, die jeweils links und rechts von der gesuchten Nullstelle liegen und verbindet diese beiden Punkte mit einer Sekante. Die Nullstelle dieser Sekante ist eine erste Näherungslösung für die Nullstelle der Parabel. Der x-Wert der Sekantennullstelle wird in die Parabelgleichung eingesetzt und ergibt den neuen Punkt links von der gesuchten Nullstelle (x_1/Y_1). Nun zeichnen wir eine zweite Sekante durch den neuen linken Punkt und den bisherigen rechten Punkt.
Die Nullstelle dieser Sekante ist die zweite Näherung an die gesuchte Nullstelle. Dieses Verfahren wird bis zur gewünschten Genauigkeit wiederholt. Das Verfahren nennt sich auch **regula falsi ('falsche Regel'),** weil es versucht, den Verlauf einer Parabel durch eine Sekante anzunähern.

Wir ziehen eine Sekante durch P1(3/14) und P2(2/-1).

Nach der Steigungsgleichung $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

ergibt sich für $m = \dfrac{-1-14}{2-3} = \dfrac{-15}{-1} = 15$

daraus ergibt sich die Gleichung der Sekante Y = mx+b

14 = 15*3 + b |-45 → -31 = b --> **Y = 15x-31**
===========

Die Nullstelle der Sekante: 15x-31 = 0 |+31 → 15x=31 |:15

x=31/15 (2,0666) Dies ist die erste Näherung an die gesuchte Nullstelle.

Wir wiederholen nun das Verfahren für P_1(3/14) und P_3(2,0666/-0,4397).

$m = \dfrac{-0{,}4397 - 14}{2{,}0666 - 3} = 15{,}47$ → 14 = 15,47*3+b → b=-32,41

Y = 15,47x - 32,41
=============

Nullstelle der Sekante: 15,47x=32,41 ---> **x=2,095** (2. Näherung)

Hier die ersten 10 Durchgänge des Sekantenverfahrens:

Linker Punkt: 2 Rechter Punkt: 3

1. Näherung	x = 2,0666666	f(x) = - 0,4397043
2. Näherung	x = 2,0950875	f(x) = - 0,1841902
3. Näherung	x = 2,1068385	f(x) = - 0,0755860
4. Näherung	x = 2,1116347	f(x) = - 0,0307570
5. Näherung	x = 2,1135821	f(x) = - 0,0124722
6. Näherung	x = 2,1143711	f(x) = - 0,0050510
7. Näherung	x = 2,1146905	f(x) = - 0,0020435
8. Näherung	x = 2,1148198	f(x) = - 0,0008267
9. Näherung	x = 2,1148720	f(x) = - 0,0003349
10. Näherung	x = 2,1148932	f(x) = - 0,0001351

Man sieht, dass dieses Verfahren sich schneller der Lösung nähert als die Intervallhalbierung. Schon nach der vierten Näherung ändern sich die ersten zwei Dezimalstellen nicht mehr. Allerdings ist dieses Verfahren per Hand gerechnet rechenaufwändiger als die Intervallhalbierung.

Bezeichnen wir den linken Punkt mit x_1, so errechnet sich jeder neue Näherungswert $\mathbf{x_m}$ nach folgender Formel:

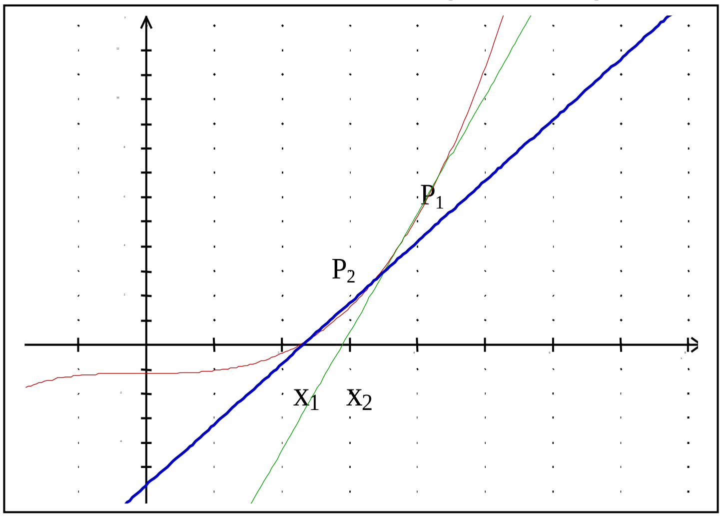
$$\boxed{x_m = x_1 - \frac{f(x_1)}{m}}$$

Wichtig: Es ist darauf zu achten, dass sich die Nullstelle immer zwischen zwei gewählten Punkten P_1 und P_2 befindet. Deshalb gilt:

Wenn $f(x_1) * f(x_m) < 0$, so wird die nächste Sekante zwischen P_1 $(x_1/f(x_1))$ und $P_m(x_m/f(x_m))$ gezogen, andernfalls zwischen $P_m(x_m/f(x_m))$ und P_2 $(x_2f(x_2))$.

4.5 Das Tangentenverfahren nach Newton

Ein Verfahren, dass noch schneller konvergiert, als die regula falsi, ist das Tangentenverfahren nach Newton. Bei diesem Verfahren wird die Kurve nicht durch eine Sekante approximiert, sondern durch eine Tangente. Die Berechnung ist ähnlich, wie bei der regula falsi, allerdings sind dabei grundlegende Kenntnisse der Differentialrechnung notwendig.

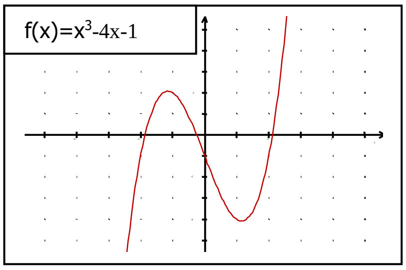


Ausgehend von einem Startpunkt P_1 auf dem Graphen einer Funktion f wird die Tangente in diesem Punkt an den Graphen gelegt und deren Nullstelle x_2 ermittelt.
Die Nullstelle x_2 ist die erste Näherung an die gesuchte Nullstelle des Graphen.
Im nächsten Schritt wird P_2 als neuer Punkt gewählt, an den eine Tangente angelegt wird. Die Nullstelle x_3 dieser Tangente ist bereits sehr nahe an der gesuchten Nullstelle.

Wir erhalten bereits nach wenigenWiederholungen einen sehr genauen Wert für die gesuchte Nullstelle.

Mathematisch errechnen sich die Näherungswerte x_{n+1} nach der Formel:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$



Beispiel: $f(x) = x^3 - 4x - 1$

a) Startwert $x_1 = 2$ $\quad f(2) = -1$
b) Steigung $f'(2) = 8$
c) Gleichung der Tangente $\quad -1 = 8*2+b \quad |-16 \quad \rightarrow b = -17$
$t(x) = 8x - 17$
d) Nullstelle der Tangente $\quad 8x - 17 = 0 \quad |+17$
$8x = 17 \quad |:8$
$x = 2{,}125$

Dasselbe Ergebnis erhält man schneller, wenn man in die Formel einsetzt:

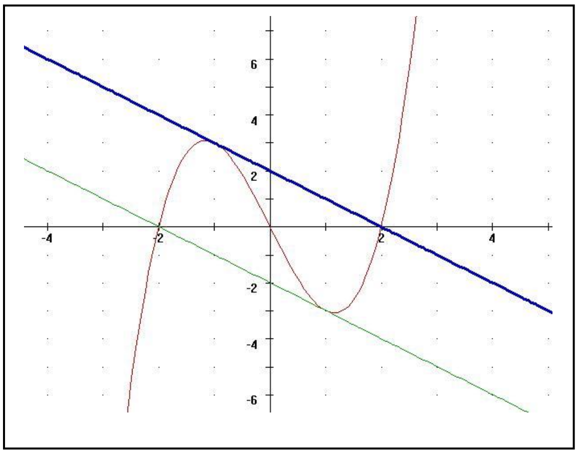
$$x = 2 - \frac{-1}{8} = 2 + 0{,}125 = 2{,}125$$

Die ersten 5 Durchgänge des Newton-Verfahrens ergeben für unsere gesuchte Nullstelle der Funktion $f(x) = x^3 - 4x - 1$ folgende Werte:

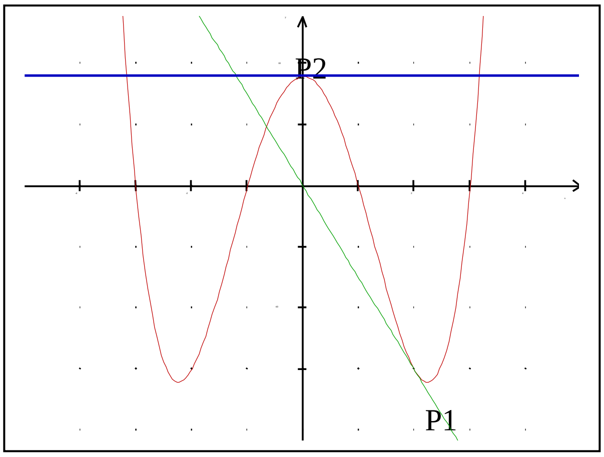
Startwert: x = 2

1. Näherung	x = 2	f(x) = -1
2. Näherung	x = 2,1248305	f(x) = 0,0940850
3. Näherung	x = 2,1149865	f(x) = 0,0007430
4. Näherung	x = 2,1149077	f(x) = 0,0000019
5. Näherung	x = 2,1149075	f(x) = 0,0000004

Wir sehen, dass bereits die dritte Näherung eine Genauigkeit bringt, die bei den beiden anderen Verfahren erst nach sieben oder acht Durchgängen erreicht wird. Allerdings ist zu beachten, dass das Newton-Verfahren nicht immer zum Ziel führt. Je nach Kurvenverlauf kann ein ungünstiger Startwert dazu führen, dass sich die Tangentennullstellen immer weiter von der gesuchten Nullstelle entfernen.



Es kommt zu keiner Annäherung



Die Tangente in P2 ist eine Waagerechte

<u>Eingabe im Taschenrechner</u>

Das Newton-Verfahren lässt sich mit Hilfe der Formel sehr gut in einem Formelrechner ausführen, wenn für $f(x_n)$ die Stammfunktion und für $f'(x_n)$ die erste Ableitung der Funktion eintragen.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Bsp.: für $f(x) = x^3-4x-1$ gibt man im TR ein:

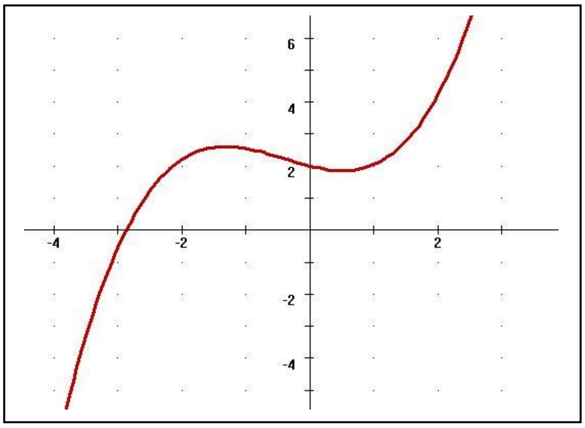
$Y=x-(x^3-4x-1)/(3x^2-4)$

Wenn man für x=2 eingeben, erscheint das Ergebnis 2,125. Diesen Wert setzen man jetzt für x ein erhält 2,11497545 als 2. Näherung usw.

4.6 Probierverfahren mit dem Taschenrechner

Probierverfahren können auch als ´chaotische´ Verfahren bezeichnet werden. Dabei wird kein systematischer Algorithmus angewendet, sondern der Anwender handelt intuitiv nach Gefühl und Erfahrung.

<u>Beispiel:</u> Gesucht wird die Null-Stelle des Graphen der Funktion **$f(x) = 0{,}25x^3 + 0{,}3x^2 - 0{,}5x + 2$** auf zwei Dezimalstellen genau.



Die Skizze des Graphen zeigt, dass es eine Nullstelle in der Nähe von x = -3 gibt.

Die Funktionswerte mit dem Horner-Schema oder mit einem Formelrechner berechnet.

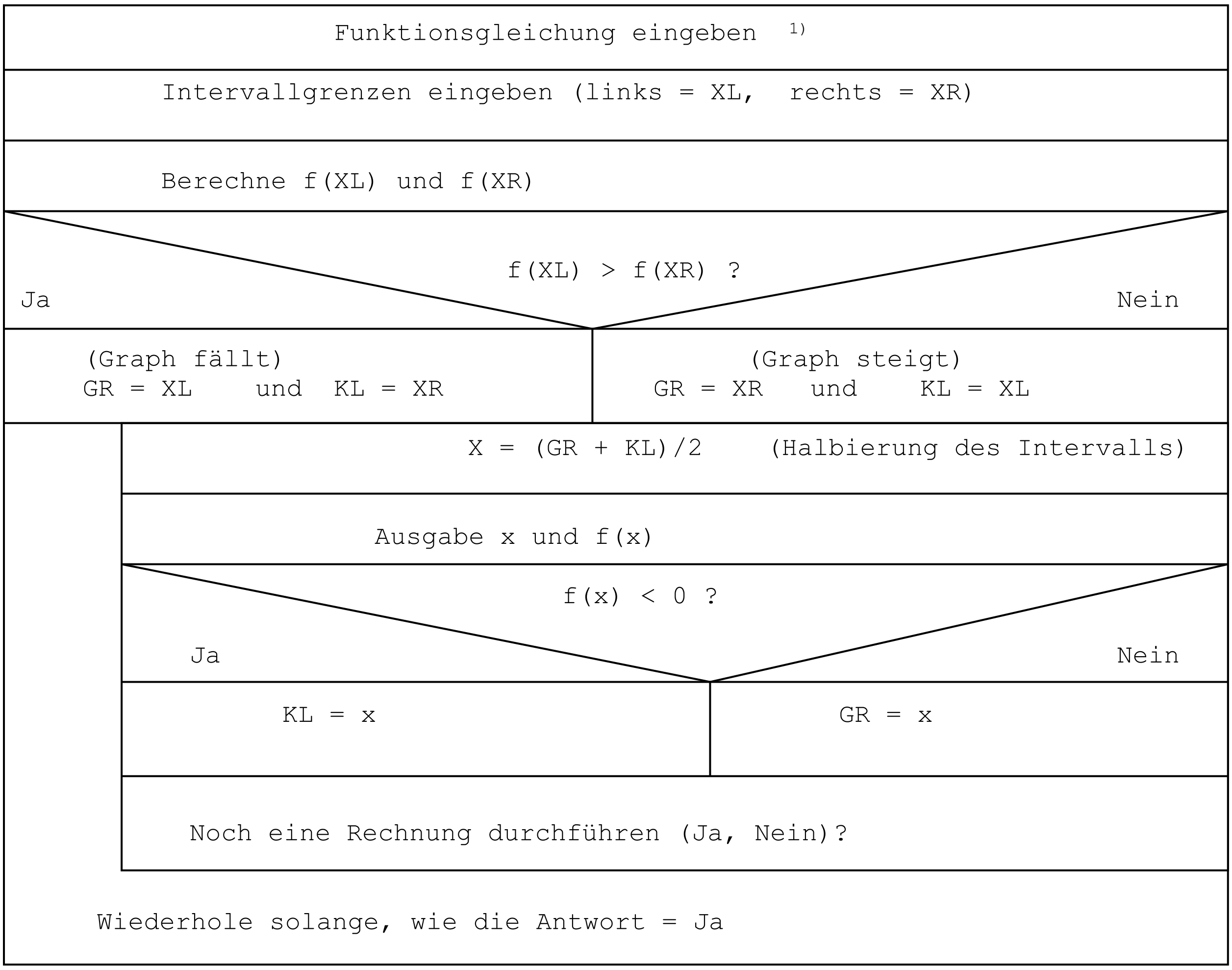
1. Berechnung x = - 3 f(x) = -0,55
   Wir befinden uns links von der Nullstelle, da f(x) negativ ist.
2. Berechnung x = - 2,5 f(x) = 1,21875 rechts von N
3. Berechnung x = - 2,8 f(x) = 0,264 rechts von N
4. Berechnung x = - 2,9 f(x) = -0,12425 links von N
5. Berechnung x = - 2,86 f(x) = 0,03547 rechts von N
6. Berechnung x = - 2,7 f(x) = -0,0039 links von N
7. Berechnung x = - 2,865 f(x) = 0,03547 rechts von N

Hier können wir abbrechen, da klar ist, dass die gesuchte Nullstelle zwischen -2,87 und –2,865 liegen muss. Auf zwei Dezimalstellen gerundet ergibt sich damit x = -2,87.

Mit dieser Methode erreicht man durch etwas Geschick und Übung ebenfalls nach wenigen Schritten ein brauchbares Ergebnis. Wichtig ist, dass man sich über den Verlauf des Graphen im Klaren ist, damit man entscheiden kann, ob ein berechneter Wert sich links oder rechts von der Nullstelle befindet.

5. Beispiel für einen Computeralgorithmus zur Nullstellenberechnung

Jedes der beschriebenen algorithmischen Verfahren kann auf einem PC nachvollzogen werden. Hierfür eignet sich jede beliebige Programmiersprache. Die Programme sind alle recht kurz, wenn man auf aufwändige Bildschirmlayouts verzichtet.
Die Programmlogik wird hier am Beispiel der **Intervallhalbierung** dargestellt.



1) Die Eingabe der Funktionsgleichung sollte man aus Vereinfachungsgründen auf einen bestimmten Funktionsgrad beschränken. Es müssen dann nur die Parameter der Funktion eingegeben werden.

Aufgaben

Berechnen Sie die Nullstellen der folgenden Aufgaben auf 2 Dezimalstellen genau.

1. Ausklammern

a)	$f(x) = 2x^3-x^2-4x$	b)	$f(x) = -x^4+2x^3$
c)	$f(x) = 0,2x^3-x^2-1,2x$	d)	$f(x) = x^5-x^3$
e)	$f(x) = -0,5x^3+4x$	f)	$f(x) = 0,1x^5-0,5x^3-0,5x^2$

2. Substitution

a)	$f(x) = x^4-8x^2-9$	b)	$f(x) = x^4-x^2-1$
c)	$f(x) =x^4-6x^2+2$	d)	$f(x) = 0,2x^5-2x^3+x$
e)	$f(x) = 0,3x^4-2x^2-5$	f)	$f(x) = 2x^4-9,125x^2+4,5$

3. Polynomdivision

a)	$f(x) = 0,5x^3-1,5x^2-3x+4$	b)	$f(x) = x^3-3x+2$
c)	$f(x) = -x^4+2x^3-1$	d)	$f(x) = x^3+8,5x^2+3,5x-4$
e)	$f(x) = x^3+7x^2+2x-40$	f)	$f(x) = -x^3-2x^2+4x+3$

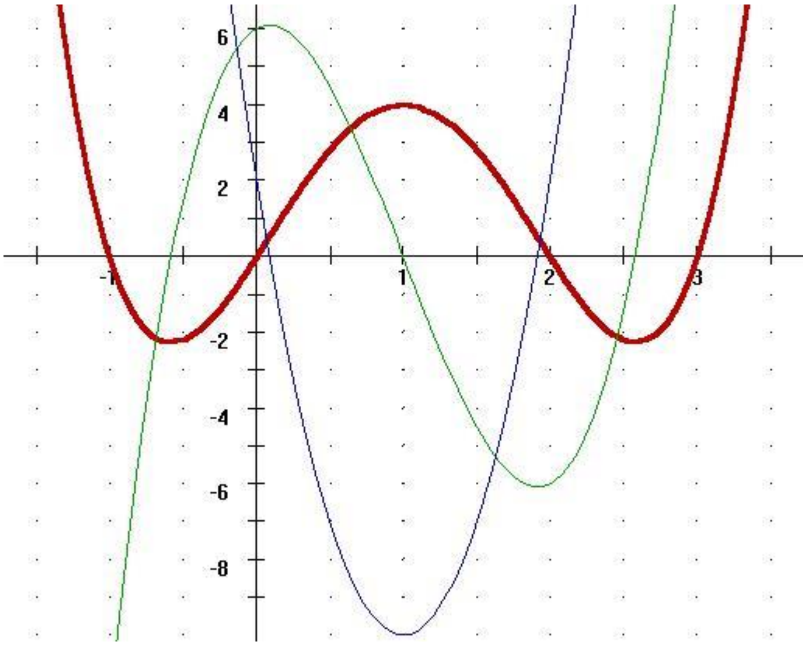
4. Näherungsverfahren

a)	$f(x) = 3x^3+6x^2+11$	b)	$f(x) = 0,25x^3+0,5x^2–x-1$
c)	$f(x) = x^3-3x+1$	d)	$f(x) = -0,5x^3-2x^2+x-0,5$
e)	$f(x) = -0,1x^3-2x^2+x+1$	f)	$f(x) = 0,002x^3–0,15x^2+2x-5$

5. Vermischte Aufgaben

a)	$f(x) = -x^4+4x^2-2$	b)	$f(x) = 0,5x^5-0,5x^3+0,4x$
c)	$f(x) = -0,3x^3+1,5x^2-x-2$	d)	$f(x) = 0,5x^4-1,5x^3-3x^2+4x$
e)	$f(x) = -0,01x^3-3x^2-2$	f)	$f(x) = -0,25x^3+1,5x^2+9x$

D I F F E R E N T I A L R E C H N U N G



Inhalt

1. Grenzwerte

Der Begriff Grenzwert wird in der Mathematik durch die Abkürzung **lim** bezeichnet. (lim kommt von lat. Limes = Grenze). Der Grenzwert beschreibt, was passiert, wenn man sich einem Wert immer mehr annähert.

Definition

Der Grenzwert einer Funktion ist die Zahl, der die Funktionswerte ziemlich nahe kommen, wenn sich die x-Werte immer mehr einer Zahl x_0 annähern

Beispiele:

$\lim\limits_{x \to 0} (1 + x^2) = 1$ oder $\lim\limits_{x \to 4} x^2 = 16$

Der Sinn der Grenzwertbetrachtung wird erst deutlich, wenn man sich einer Zahl x_0 nähern will, die es nicht gibt oder die in einem algebraischen Ausdruck nicht erlaubt ist. Solche Ausdrücke sind z. B. ∞ oder der x-Wert für den der Nenner eines Bruches 0 wird.
Man kann diesen Wert x_0 nicht in die Funktionsgleichung einsetzen, man kann ihm aber sehr nahe kommen. Dieses Annähern an einen Wert x_0 bezeichnet man als Grenzwertbetrachtung.

Beispiele:

$\lim\limits_{x \to \infty} x^2 = \infty$ oder $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$

für komplexere Ausdrücke

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{x-2} = \infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^3 + 20000}{2x^3 - 64000} = \frac{3}{2}$

Aufgaben: Berechnen Sie die Grenzwerte

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x+1}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^4 + 6}{x^3 + 2}$

c) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{-2}{2-x}$

d) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{-2}{x+1}$

e) $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x^2 - 9}{x+3}$

f) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{-2x+3}{x+1}$

g) $\lim \frac{x^2 - 1}{x^2 - x}$, für $x \to 1$

2. Steigungsberechnungen (Wiederholungsaufgaben)

1. Geben Sie die Steigungsmaße in der jeweils fehlenden Größe an.

	Steigungsmaß m	**in %**	**als Winkel**
a)	0,5		
b)		20 %	
c)			50 Grad
d)	2		
e)		85 %	
f)			130 Grad

2. Berechen Sie die Steigung der Geraden, die durch die angegebenen Punkte geht

a) A(-5/6) B(2/1) b) A(-2/-10) B(6/8)

c) A(1,4/0,6) B(10,2/19,8) d) A(-2,4/-0,8) B(3,6/-5,2)

3. Berechnen Sie die Steigung der Sekante, die den Graphen der angegebenen Funktion an den angegebenen Stellen schneidet.

a) $f(x) = 0{,}5x^2 + 2x - 3$ $x1 = 1$ $x2 = 5$

b) $f(x) = 0{,}2x^3 - 0{,}5x^2 - 2$ $x1 = 1$ $x2 = 3$

c) $f(x) = 0{,}4x^3 + 1{,}4x^2 - 2x + 3$ $x1 = -4$ $x2 = -3{,}5$

4. Berechne den Anstieg der Sekanten durch den Graphen mit der Funktionsgleichung $f(x) = -0{,}5x^3 - 0{,}2x^2 + 2x + 3$ an den angegebenen Stellen.

a) $x1 = 2$ $x2 = 3$

b) $x1 = 2{,}5$ $x2 = 3$

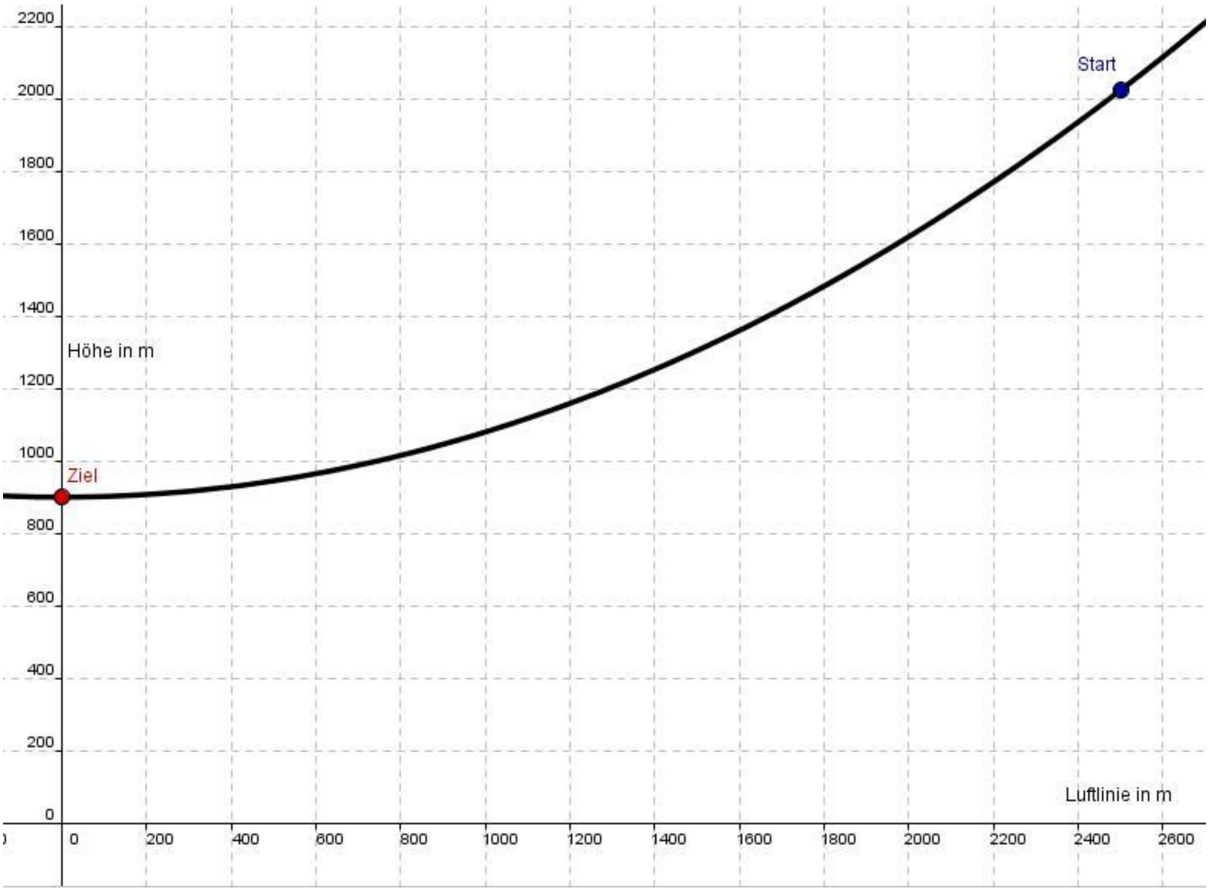
c) $x1 = 2{,}9$ $x2 = 3$

d) Welchen Anstieg wird der Graph vermutlich an der Stelle x = 3 haben?

5. Der Graph $f(x) = -1{,}2x^2 + 3x + 4$ wird an der Stelle $x = -1$ von einer Sekante geschnitten. Berechnen Sie den zweiten Schnittpunkt dieser Sekante, wenn diese eine Steigung von 2 hat.

Aufgabe 6

Für die kommende Ski WM soll eine neue Skipiste angelegt werden. Der Skihang hat ein parabelförmiges Profil. Die Profilkurve kann durch eine Funktion 2. Grades beschrieben werden. Der Startpunkt des Rennes liegt auf einer Höhe von 2025 m über NN.
Der Zielpunkt befindet sich im Scheitelpunkt des Graphen in 900 m Höhe. Start und Ziel sind gemessen an der x-Achse 2500 m voneinander entfernt.



Die Sportler sollen mit einer Seilbahn vom Ziel zum Start befördert werden. Tal- und Bergstation liegen direkt neben dem geplanten Start- bzw. Zielpunkt.
Außerdem soll eine Pistenraupe angeschafft werden, die den Hang präpariert.

Technische Daten Pistenraupe
Turbolader, 6 Zylinder, Hubraum 11800 ccm, Leistung 315 kW, Tankinhalt 210 l, max. Steigfähigkeit 90 %, Leergewicht 7300 kg, Höchstgeschw. 24 km/h,

1. Die Seilbahn ist durch viele Stützen straff gespannt, so dass der Verlauf des Seiles von der Seite, wie eine Gerade verläuft. Bestimmen Sie die Länge des Seils und die Steigung der Seilbahn.

2. Die Anschaffung der Pistenraupe lohnt sich nur, wenn die gesamte Piste von Start bis zum Ziel mit ihr präpariert werden kann. Würden Sie dem Kauf der Pistenraupe zustimmen?

Wiederholung und Vertiefung

Aufgabe 7

Der neue Ski Hang für die kommende Skiweltmeisterschaft hat die Form einer Parabel mit der Gleichung $f(x) = 0{,}05x^2 - 0{,}2x - 0{,}8$.
Der Startpunkt liegt bei $x = 12$, der Zielpunkt befindet sich im Scheitelpunkt des Graphen.

a) Fertigen Sie eine Skizze an und markieren Sie die Abfahrtsstrecke.

b) Vom Start bis zum Ziel soll eine Seilbahn gebaut werden. Welche Steigung hat die Seilbahn, wenn die Trasse linear verlaufen soll.

c) Für die Präparierung der Piste soll eine Pistenraupe angeschafft werden. Ein angebotenes Fahrzeug hat eine Steigfähigkeit von 90 %. Ist diese Raupe geeignet, den gesamten Hang zu befahren?

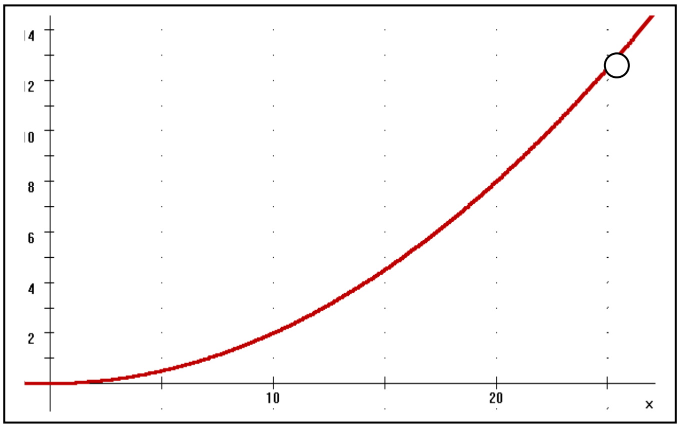
d) Falls es sich ergeben sollte, dass die Raupe nicht den gesamten Hang befahren kann, geben Sie an, bis wohin die Raupe fahren kann.

3. Vom Differenzenquotienten zum Differentialquotienten

Gegeben ist die Funktion mit der Gleichung f(x) = $0{,}02x^2$. Wir wollen die Steigung dieser Parabel an der Stelle x = 25 bestimmen.

Wir berechnen zunächst den Anstieg der Sekante zwischen den Punkten A(25/12,5) und B(25,1/12,6002)

m = --------------



Wenn wir den zweiten Punkt B also sehr nahe an den Punkt A heranlegen, bekommen wir eine sehr genaue Annäherung an die gesuchte Steigung der Kurve im Punkt (25/12,5)

Der Punkt B liegt also ein sehr kleines Stück weiter rechts vom Punkt A. Wenn wir dieses sehr kleine Stück mit dem Buchstaben **h** bezeichnen, dann ist der x-Wert von B: x+h
und der Funktionswert von B: $0{,}02(x + h)^2$.
In unserem Fall mit x = 25 gelten für B die Koordinaten B(25+h/$0{,}02(25+h)^2$)
dann gilt für die Steigung der Sekante:

$$m = \frac{0{,}02(25+h)^2 - 12{,}5}{(25+h)-25} = \frac{0{,}02(625+50h+h^2)-12{,}5}{h} = \frac{12{,}5+h+0{,}02h^2-12{,}5}{h} = \frac{h+0{,}02h^2}{h}$$

durch Ausklammern und kürzen von h ergibt sich: $m = \frac{h(1+0{,}02h)}{h} = 1 + 0{,}02h$

da h aber ein sehr kleiner Wert ist, der gegen 0 geht, so gilt:

lim 1+h = 1, wenn h →0 **D.h. die gesuchte Steigung hat den Wert 1 (100 % oder 45 Grad)**

(lim = limes, heißt Grenzwert)

<u>Übungen</u>

Berechnen Sie mit obigem Verfahren die Steigungen an der Stelle x= 20, x = 5 sowie x = -10.

Allgemeine Darstellung:

Für die Steigung gilt: $m = \frac{Y_2 - Y_1}{x_2 - x_1}$ *oder* $m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

wenn nun $x_2 = x + h$ und $x_1 = x$ ist, dann gilt

(1) $$m = \frac{f(x+h) - f(x)}{x+h-x}$$

da h sich dem Wert 0 nähert, so gilt

(2) $$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{x+h-x}$$

Wir bezeichnen (1) als den **Differenzenquotienten** und (2) als den **Grenzwert des Differenzenquotienten** für h gegen 0 oder auch als den **Differentialquotienten**.

Der Differentialquotient entspricht der Steigung einer Kurve in einem Punkt. Diese bezeichnen wir auch als die **1. Ableitung.**

Die 1. Ableitung einer Funktion an der Stelle x entspricht der Steigung des Graphen an der Stelle x.

Aufgabe 8

Berechnen Sie den Anstieg des Graphen mit der angegebenen Funktionsgleichung an der Stelle x.

a) $f(x) = -0{,}4x^2$ $x = 2$

b) $f(x) = -0{,}4x^2 + 5$ $x = 3$
$x = 2$!!!

c) $f(x) = 0{,}1x^2 - 2x + 1$ $x = 4$

d) $f(x) = x^3$ $x = 3$

4. Die Ableitungsfunktion

Wir betrachten noch einmal das Beispiel mit der Funktionsgleichung $f(x) = 0{,}02x^2$

Wir haben in der letzten Übungen schon folgende Steigungen berechnet:

x-Wert	Steigung des Graphen
20	0,8
25	1
5	0,2
-10	-0,4

Wir haben für x_1 eine Zahl in die Steigungsformel eingesetzt, dann war x_2 diese Zahl + h.
Wir wollen jetzt für x nicht einen bestimmten Wert einsetzen, sondern die Variable x.
Dann ist $x_1 = x$ und $x_2 = x + h$

Nun heißt der Differenzenquotient:

$$\boxed{m = \frac{0{,}02(x+h)^2 - 0{,}02x^2}{x+h-x}}$$

Wir rechnen weiter:

$$m = \frac{0{,}02(x^2+2xh+h^2) - 0{,}02x^2}{h} = \frac{0{,}02x^2+0{,}04xh+0{,}02h^2-0{,}02x^2}{h} = \frac{0{,}04xh+0{,}02h^2}{h}$$

wir klammern h aus: $m = \dfrac{h(0{,}04x+0{,}02h)}{h}$ kürzen mit h ergibt

$m = 0{,}04x + 0{,}02h$, dies ergibt: $m = 0{,}04x$, wenn $h \rightarrow 0$

Damit haben wir den Anstieg der Funktion $f(x) = 0{,}02x^2$ jetzt allgemein mit **0,04x** errechnet und können für x nun beliebige Werte einsetzen, um die Steigung zu erhalten.
Wir überprüfen dies zunächst anhand der Werte in der Tabelle und stellen fest, dass sich dieselben Werte ergeben, wenn wir die x-Werte in die den Term 0,04x einsetzen.

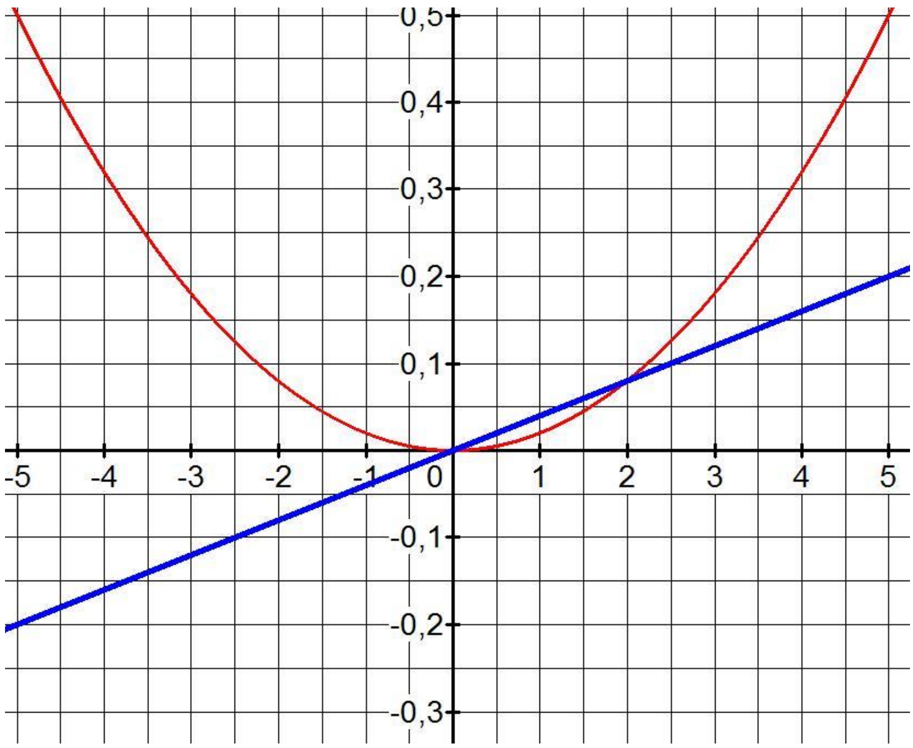
Den Term 0,04x bezeichnen wir als die **Ableitungsfunktion** der Funktion $f(x) = 0{,}02x^2$.
Die Ableitungsfunktion wird mit f'(x) bezeichnet.

Stammfunktion: $f(x) = 0{,}02x^2$ Ableitungsfunktion $f'(x) = 0{,}04x$

Vervollständigen wir folgende Tabelle

x	$f(x) = 0{,}02x^2$	$f'(x) = 0{,}04x$
-10	2	-0,4
-8		
-6		
-4		
-2		
0		
2		
4		
6		
8		
10		

Zeichnen wir beide Graphen in ein Schaubild:



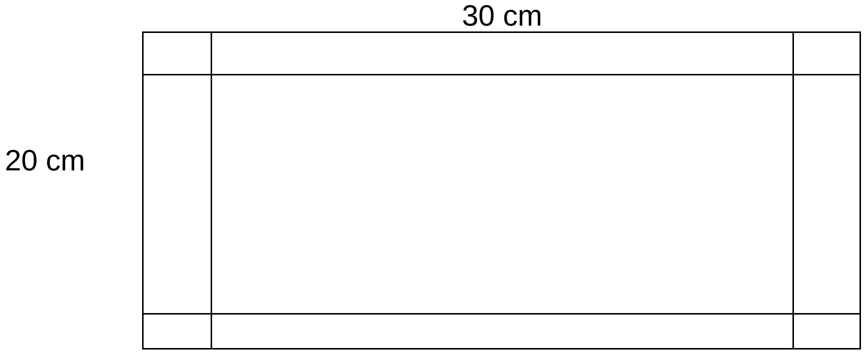
Der Graph der Ableitungsfunktion zeigt uns den Anstieg der Stammfunktion an jeder Stelle. D.h., wenn wir den Anstieg der Parabel z.B. an der Stelle x = -3 ablesen wollen, müssen wir nachsehen, welchen Funktionswert die Ableitungsfunktion an dieser Stelle hat.

Aufgabe 9: Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion zu folgenden Funktionen.

1. $f(x) = x^2$ $f'(x) =$
2. $f(x) = -3x^2$ $f'(x) =$
3. $f(x) = 1{,}5x$ $f'(x) =$ Achtung! Erst nachdenken.
4. An welcher Stelle hat der Graph der Funktion von 2. den Anstieg 2 bzw. –1 ?

Aufgabe 10

Aus einem rechteckigen Stück Kartonpappe mit den Abmessungen 20 x 30 cm (etwa DIN A4) soll nach beiliegender Skizze eine nach oben offene Schachtel gefaltet werden.



1. Bauen Sie ein Modell nach obigen Angaben

2. Berechnen Sie das Volumen des Modells

3. Tragen Sie die Werte des Modells und einige andere Lösungsvorschläge in die folgende Tabelle ein

Höhe	Länge	Breite	Volumen

4. Erstellen Sie eine derartige Tabelle mit Excel (Länge und Breite werden anhand der Höhe errechnet.
   Bei welchen Abmessungen ist das Volumen am größten?

5. Stellen Sie eine Gleichung für das Volumen für diese Aufgabe als Funktionsgleichung in Abhängigkeit der Höhe auf.
   V(x)= ....(wobei x = Höhe der Schachtel)

6. Zeichnen Sie den Graphen für das Volumen anhand Funktionsgleichung oder Wertetabelle.

5. Ableitungsregeln

Die wichtigsten Ableitungsregeln sind in folgender Tabelle zusammengefasst:

Regel	**f(x)**	**f ` (x)**	**Hinweis**
Potenzregel	$a * x^n$	$n * a * x^{n-1}$	Diese Regel gilt auch für negative Exponenten
Produktregel	$u * v$	$u' * v + u * v'$	u-Strich mal v plus u mal v-Strich
Quotientenregel	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	u-Strich mal v minus u mal v-Strich geteilt durch v-Quadrat
Kettenregel	$f(h(x))$	$f'(h(x) * h'(x)$	Äußere Ableitung mal innere Ableitung
e-Funktion	e^x	e^x	Ableitung gleich der Funktion
Erweiterte e-Funktion	$a * e^{i \cdot x}$	$a * i * e^{i \cdot x}$	Nach der Kettenregel
Sinusfunktion	*sin (x)*	*cos (x)*	
Kosinusfunktion	*cos (x)*	*-sin (x)*	
Logarithmusfunktion	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	

Beispiel zur Produktregel	Beispiel zur Quotientenregel
f(x) = x² · sin x u(x) = x² v(x) = sin x also f'(x) = 2x· sin x + x² · cos x	$f(x)=\frac{x^2}{2x+3} \to f`(x)=\frac{2x(2x+3)-x^2\cdot 2}{(2x+3)^2}=$ $\frac{4x^2+6x-2x^2}{4x^2+12x+9}=\frac{2x^2+6x}{4x^2+12x+9}$

Beispiel zur Kettenregel

Beispiel: $f(x)=\sqrt{3x+2}$ Die verkettete Funktion besteht aus der Wurzel und aus dem Ausdruck unter der Wurzel.

äußere Funktion: g(x) = $\sqrt{h(x)}$ oder g(x) = $h(x)^{½}$ Ableitung: g'(x) = ½$(h(x))^{-½}$
oder g'(x) = ½$(3x+2)^{-½}$

innere Funktion h(x) = 3x+2 Ableitung: h'(x) = 3

Zusammen gefasst: f'(x) = ½$(3x+2)^{-½}$ · 3

daraus ergibt sich: f'(x) = $\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}$

Aufgaben zu den Ableitungsregeln

Bilden Sie die 1. Ableitung zu folgenden Funktionen:

a) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 7$ b) $f(x) = -1{,}5x^5 + 2{,}4x^4 - 0{,}25x^3 + 25x^2 - 13{,}5x + 1$ c) $f(x) = 4{,}5$

d) $f(x) = \frac{4}{7x}$ e) $f(x) = \frac{3x}{2x^5}$ f) $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$ g) $f(x) = \frac{1{,}5x^2}{1+x^3}$

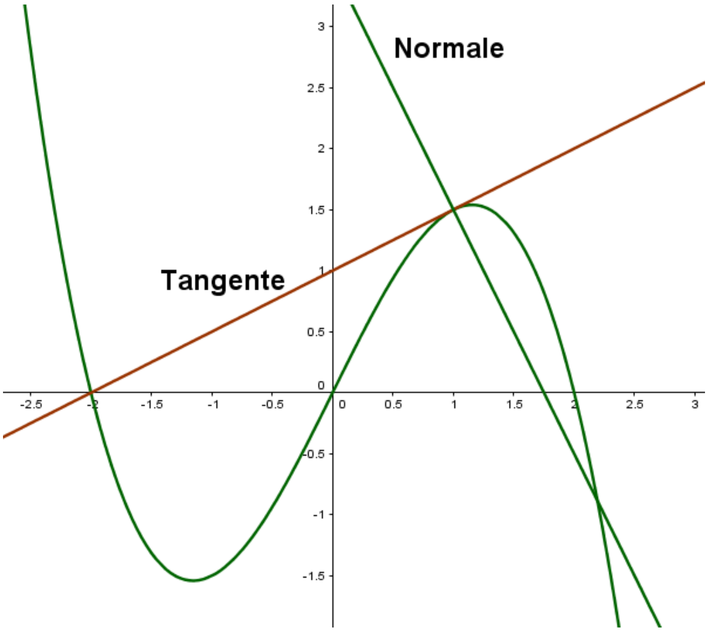
h) $f(x) = (x^2 - 3x)(3x^4 + 7)$ i) $f(x) = \frac{1}{8}(\frac{1}{2}-x^2)^7$ k) $f(x) = \sin(2x)$

l) $f(x) = 0{,}25x^4(1{,}5x^3 + 4x)$ m) $f(x) = \frac{2x}{\sin(0{,}5x^3)}$

n) $f(x) = (2x^3 + 4)^5$ o) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x}}$

1. Bestimmen von Tangenten- und Normalengleichung

Eine **Tangente** ist eine Gerade, die einen Graphen an einer Stelle berührt und die dieselbe Steigung hat, wie der Graph an dieser Stelle.
Eine **Normale** ist eine Gerade, die senkrecht (d. h. im rechten Winkel) zur Tangente an einen Graphen durch deren Berührpunkt verläuft.



Beispielaufgabe
Gegeben ist die Funktion mit der Gleichung $f(x) = -0{,}5x^3 + 2x$. Berechnen Sie die Gleichung der Tangente und der Normalen an den Graphen f an der Stelle x = 1.
<u>Überlegungen zur Lösung:</u> An der Stelle x = 1 hat der Graph den Funktionswert f(1) = 1,5. D.h. der gemeinsame Punkt hat die Koordinaten P(1/1,5). Die Steigung der Tangente ergibt sich aus der ersten Ableitung von f an der Stelle 1. $f'(x) = -1{,}5x^2 + 2$ → $f'(1) = 0{,}5$ Aus $t(x) = mx + b$ ergibt sich durch Einsetzen: $1{,}5 = 1 \cdot 0{,}5 + b$ also ist b = 1 Die Gleichung der Tangente lautet also: **t(x) = 0,5x + 1** Die Steigung der Normalen ist senkrecht zur Steigung der Tangente. Nach Kapitel 2.6 des Skriptes ergibt sich die Steigung einer Orthogonalen aus der Formel $m_2 = -\frac{1}{m1}$. Daraus folgt das die Steigung der Normalen den Wert -2 hat ($m_2 = -\frac{1}{0{,}5}$). Durch Einsetzen ergibt sich: $1{,}5 = -2 \cdot 1 + b$ also ist b = 3,5 Die Gleichung der Normalen lautet also: **n(x) = -2x + 3,5.**

Anwendungen der Differentialrechnung

---

1. Kurvendiskussion

Leitfaden zur Kurvendiskussion

Die Untersuchung einer Kurve auf ihre speziellen Eigenschaften und Merkmale bezeichnet man als 'Kurvendiskussion'. Dabei können folgende Punkte untersucht werden:

1. **Definitionsbereich**
2. **Symmetrieverhalten**
3. **Verhalten an den Rändern des Definitionsbereiches**
4. **Nullstellen**
5. **Ableitungen f´, f´´ und f´´´**
6. **Extremwerte**
7. **Wendepunkte**
8. **Monotonie- und Krümmungsintervalle**
9. **Zeichnung des Graphen und der Ableitungen**

Erläuterungen zu den einzelnen Punkten auf den folgenden Seiten

Erläuterungen

zu 1. Der Definitionsbereich legt fest, welche x-Werte in die Funktionsgleichung eingesetzt werden dürfen, bzw. für welche x-Werte die Funktion nicht definiert ist. Dies ist besonders bei gebrochen rationalen Funktionen der Fall.
Bei ganzrationalen Funktionen gilt meist **D = R.**

zu 2. Besitzt die Funktionsgleichung nur geradzahlige Exponenten, so spricht man von Achsensymmetrie. Besitzt die Funktionsgleichung nur ungeradzahlige Exponenten, spricht man von Punktsymmetrie. Bei sowohl geraden aus auch ungeraden Exponenten liegt keine Symmetrie vor.

zu 3. Bei ganzrationalen Funktionen liegen die Grenzen des Definitionsbereiches meist bei $\pm\infty$.
Wir beschreiben also, wohin die Enden des Graphen zeigen, wenn die x-Werte sich diesen Grenzen nähern. Bei Funktionen, die nicht ganzrational sind. muss außerdem das Verhalten an den Rändern der Definitionslücken untersucht werden (Verhalten im 'Unendlichen').

zu 4. Als Nullstellen werden die Schnittpunkte des Graphen der Funktion mit der x-Achse. bezeichnet. F(x) = 0. Sie heißen N_1, N_2 usw. Zur Berechnung der Nullstellen kennen wir verschiedene Verfahren. Quadratische Funktionen können mit der p-q-Formel oder der a-b-c-Formel berechnet werden. Funktionen höheren Grades können entweder durch Ausklammern, Substitution oder Polynomdivision in lineare und quadratische Terme zerlegt werden. Falls dieses nicht möglich ist, so muss die Nullstelle durch ein Näherungsverfahren gesucht werden (z.B. Newtonverfahren).

zu 5. Anwenden der Differenzierungsregeln.

zu 6. Extremwerte sind relative oder absolute Hoch- oder Tiefpunkte des Graphen. Sie werden auch Minima oder Maxima genannt. Wir erhalten den x-Wert eines Extremwertes, wenn wir die 1. Ableitung = 0 setzen (**notwendige Bedingung: f'(x) = 0**).
Durch Einsetzen des x-Wertes in die 2. Ableitung können wir feststellen, ob es sich um einen Hochpunkt oder Tiefpunkt handelt (**hinreichende Bedingung: f''(x)** $\neq 0$**)** Es gilt:

f´(x) = 0 und f´´(x) < 0 : $\rightarrow$ Hochpunkt H(/)
f´(x) = 0 und f´´(x) > 0 : $\rightarrow$ Tiefpunkt T(/)
f´(x) = 0 und f´´(x) = 0 : $\rightarrow$ Es kann sich sowohl um einen Extremwert als auch um einen Sattelpunkt handeln. Zur genauen Bestimmung muss die Steigung in der Umgebung des gefundenen Wertes untersucht werden (Vorzeichenwechselkriterium) oder es muss der Nachweis als Wendepunkt erbracht werden. (Siehe Punkt 7.)

Alternativ können alle Punkte mit dem Vorzeichenwechselkriterium bestimmt werden.
Es sei x_0 der x-Wert für den gilt: f´(x)=0. Dann ist die Steigung in der Umgebung von x_0 zu bestimmen. Wenn h ein beliebiger kleiner Wert ist, gilt:

a) Ist $f'(x_0-h) > 0$ und $f'(x_0+h) < 0$ dann liegt ein Maximum (Hochpunkt) vor.
b) Ist $f'(x_0-h) < 0$ und $f'(x_0+h) > 0$ dann liegt ein Minimum (Tiefpunkt) vor.
c) Ist $f'(x_0-h)$ und $f'(x_0+h)$ in beiden Fällen positiv oder negativ dann handelt es sich um einen Sattelpunkt (siehe oben)

zu 7. Für Wendepunkte gelten folgende Bedingungen

$$\boxed{f''(x) = 0 \text{ und } f'''(x) \neq 0 \rightarrow W(\ \ /\ \ )}$$

Für Sattelpunkte gilt zusätzlich noch: $f'(x) = 0$. Sattelpunkte, die unter Punkt 5 festgestellt wurden, müssen immer auch Wendepunkte sein.
Anhand der 3. Ableitung kann festgestellt werden, ob sich im Wendepunkt der Graph von links nach rechts oder von rechts nach links wendet:
3. Ableitung im WP negativ → Rechts-Links-Krümmung
3. Ableitung im WP positiv → Links-Rechts-Krümmung

zu 8.
Die Grenzen der Monotonieintervalle ergeben sich durch die gefundenen Extremwerte. Für das Monotonieverhalten in einem Intervall gilt:

$f'(x) > 0 \rightarrow$ monoton steigend
$f'(x) < 0 \rightarrow$ monoton fallend

Durch einen Blick auf den Verlauf des Graphen ergibt sich aber immer der Monotonieverlauf, so dass der rechnerische Nachweis mit der ersten Ableitung nicht unbedingt erbracht werden braucht.

Die Grenzen der Krümmungsintervalle ergeben sich durch die gefundenen Wendepunkte. Für das Krümmungsverhalten innerhalb der Intervalle gilt:

$f''(x) > 0 \rightarrow$ Linkskurve
$f''(x) < 0 \rightarrow$ Rechtskurve

Ein Blick auf den Verlauf des Graphen zeigt uns aber auch schon das Krümmungsverhalten, so dass der rechnerische Nachweis mit der zweiten Ableitung nicht unbedingt erbracht werden braucht. Alternativ kann man das Krümmungsverhalten auch über die 3. Ableitung im Wendepunkt bestimmen. Wenn die 3. Ableitung im Wendepunkt positiv ist, dann handelt es sich um den Übergang von einer Rechtskurve in eine Linkskurve, Umgekehrt, wenn die 3. Ableitung negativ ist.

zu 9. Anhand der ermittelten Nullstellen, Extremwerte und Wendpunkte kann der Graph der Stammfunktion und seiner ersten beiden Ableitungen skizziert werden.

Allgemeine Anmerkungen:

Zeichnung und errechnete Punkte sollten immer miteinander verglichen werden. Die errechneten Werte müssen sich auf der Zeichnung wiederfinden. Überprüfe, ob das was errechnet wurde, auch plausibel ist. Sind alle Nullstellen bestimmt worden? Stimmt die maximal mögliche Anzahl der Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte mit dem Grad der Funktion überein? Zwischen zwei Extremwerten muss immer mindestens ein Wendepunkt liegen.
Die Zeichnung des Graphen sollte gleichzeitig mit der Rechnung erfolgen.

Verbale Erläuterung des Vorzeichenwechselkriteriums

Extremwerte und Sattelpunkte können auch mit dem Vorzeichenwechselkriterium nachgewiesen werden. Angenommen wir haben festgestellt, dass die 1. Ableitung einer Funktion an der Stelle x = 2 den Wert 0 hat. Wie können wir nun feststellen, ob es sich dabei um einen Hoch-, Tief- oder Sattelpunkt handelt? Wir wissen:

Merkmal eines **Hochpunktes** ist es, dass es links vom Gipfel **bergauf** geht, rechts vom Gipfel geht es **bergab**.

Merkmal eines **Tiefpunktes** ist es, dass es links vom Gipfel **bergab** geht, rechts vom Gipfel geht es **bergauf**.
Merkmal eines **Sattelpunktes** ist es, dass es links und rechts vom Sattelpunkt **in beiden Fällen** entweder **bergauf** oder **bergab** geht.
Welcher Fall nun vorliegt, können wir überprüfen, indem wir einen x-Wert der etwas (z.B. 0,1) links vom Gipfel liegt und einen x-Wert etwas rechts vom Gipfel in die 1. Ableitung einsetzen.

Aufgabe 11: Vervollständigen Sie die Tabellenfelder in der folgenden Übersicht.

Synopse zur Kurvendiskussion

Untersuchungsgegenstand	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Bemerkungen
Nullstellen	0	-	-	-	-
Hochpunkt	-			-	-
Tiefpunkt	-			-	-
Sattelpunkt	-				alternativ mit dem **Vorzeichenwechselkriterium** auf Hoch- oder Tiefpunkt prüfen
Wendepunkt	-				-
Hoch- oder Tiefpunkt	-	0	0		muss noch mit dem **Vorzeichenwechselkriterium** auf Hoch- oder Tiefpunkt geprüft werden.

Analysis Thema: **Anwendungen der Differentialrechnung**

Beispiel für eine Kurvendiskussion

Diskutiere die Funktion mit der Gleichung $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x$.

1. Definitionsbereich $D = R$
2. Keine Symmetrie, da sowohl gerade als auch ungerade Exponenten vorhanden sind.
3. Verhalten an den Rändern des Definitionsbereiches:
   Es handelt sich um eine Funktion 4. Grades mit positivem a. D.h., dass beide Enden des Graphen nach oben zeigen müssen. Es gilt also: Für x gegen $\pm\infty$ gilt $f(x) = \infty$.
4. Nullstellen:
   $x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x = 0$ Ausklammern
   $x(x^3 - 4x^2 + x + 6) = 0$ $\underline{x_1 = 0}$
   Durch Probieren finden wir eine weitere Nullstelle bei $\underline{x_2 = -1}$ und bilden den Linearfaktor $(x + 1)$ um eine Polynomdivision durchzuführen.

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 4x^2 + x + 6) : (x + 1) = x^2 - 5x + 6 \\
\underline{-(x^3 + x^2)} \\
\quad -5x^2 + x \\
\quad \underline{-(-5x^2 - 5x)} \\
\qquad 6x + 6 \\
\qquad \underline{-(6x + 6)} \\
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Die Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 - 5x + 6 = 0$ ergibt $\underline{x_3 = 2}$ und $\underline{x_4 = 3}$
Somit ergeben sich die Nullstellen $N_1(0/0)$, $N_2(-1/0)$, $N_3(2/0)$ und $N_4(3/0)$.

5. Ableitungen
   $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 2x + 6$
   $f''(x) = 12x^2 - 24x + 2$
   $f'''(x) = 24x - 24$

6. Extremwerte ($f'(x) = 0$)
   $4x^3 - 12x^2 + 2x + 6 = 0$ Durch Probieren finden wir die Nullstelle $x_1 = 1$ und führen wieder eine Polynomdivision durch.

$$
\begin{array}{l}
(4x^3 - 12x^2 + 2x + 6) : (x - 1) = 4x^2 - 8x - 6 \\
\underline{-(4x^3 - 4x^2)} \\
\quad -8x^2 + 2x \\
\quad \underline{-(-8x^2 + 8x)} \\
\qquad -6x + 6 \\
\qquad \underline{-(-6x + 6)} \\
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Die Lösung der quadratischen Gleichung $4x^2 - 8x - 6 = 0$ ergibt $\underline{x_2 = 2{,}58}$ und $\underline{x_4 = -0{,}58}$

Wir stellen jetzt fest, ob Hoch-, Tief- oder Sattelpunkte vorliegen

$x_1 = 1$	$f''(1)$	$= -10$ somit Hochpunkt, da < 0	**HP(1/4)**
$x_1 = 2{,}58$	$f''(2{,}58)$	$= 19{,}96$ somit Tiefpunkt, da > 0	**TP(2,58/-2,25)**
$x_1 = -0{,}58$	$f''(-0{,}58)$	$= 19{,}96$ somit Tiefpunkt, da > 0	**TP(-0,58/-2,25)**

7. Wendepunkte (f'' (x) = 0)

$12x^2 - 24x + 2 = 0$ $x_1 = 1{,}91$ $x_2 = 0{,}09$

Bestätigung, ob Wendepunkt vorliegt durch die 3. Ableitung

$x_1 = 1{,}91$	f'''(1,91) nicht 0,	also	**WP(1,91/0,55)**
$x_2 = 0{,}09$	f'''(0,09) nicht 0,	also	**WP(0,09/0,55)**

8. Monotonie- und Krümmungsintervalle

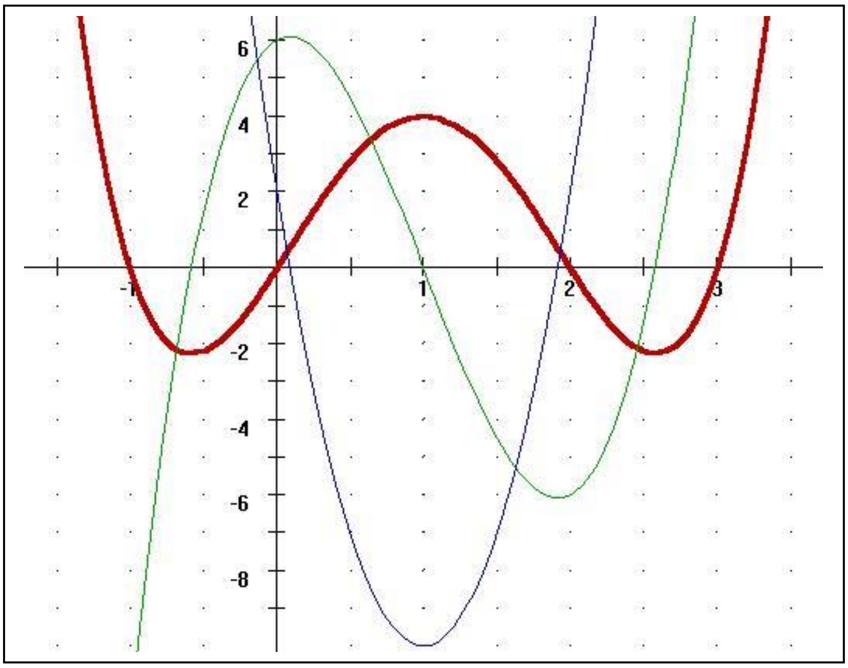
Monotonieintervalle

I.	(-∞ bis -0,58)	monoton fallend	Nachweis: f' (-1) = -12
II.	(-0,58 bis 1)	monoton steigend	Nachweis: f'(0) = 6
III.	(1 bis 2,58)	monoton fallend	Nachweis: f' (2) = -6
IV.	(2,58 bis ∞)	monoton steigend	Nachweis: f' (3) = 12

Krümmungsintervalle

I.	(-∞ bis 0,09)	Linkskurve	Nachweis: f'' (0) = 2
II.	(0,09 bis 1,91)	Rechtskurve	Nachweis: f'' (1) = -10
III.	(1,91 bis ∞)	Linkskurve	Nachweis: f'' (2) = 2

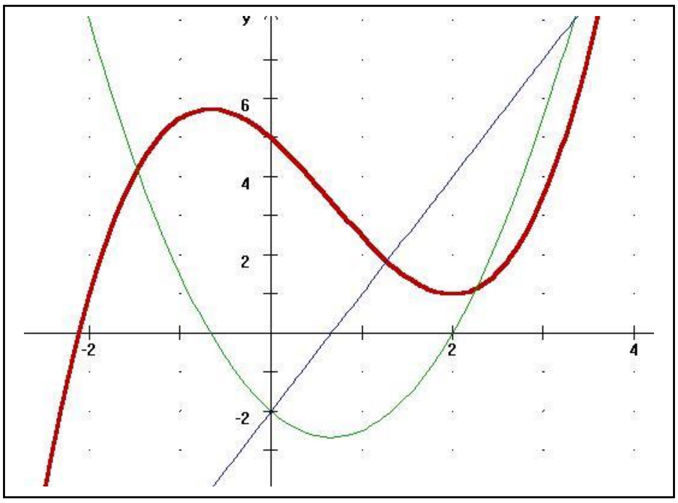
9. Zeichnung von f, f' und f''



Alle Ergebnisse wurden auf 2 Stellen nach dem Komma gerundet.

Graphische Darstellung der Elemente der Kurvendiskussion

Hoch- und Tiefpunkte

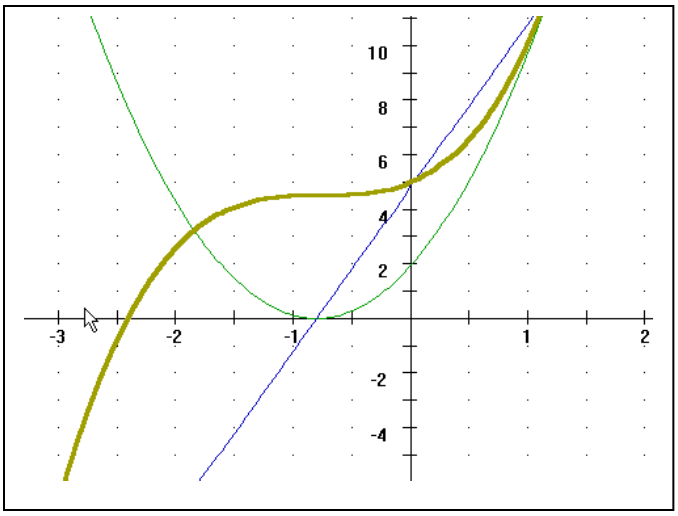


Wir sehen:

Hochpunkt: 1. Ableitung = 0 und
2. Ableitung < 0

Tiefpunkt: 1. Ableitung = 0 und
2. Ableitung > 0

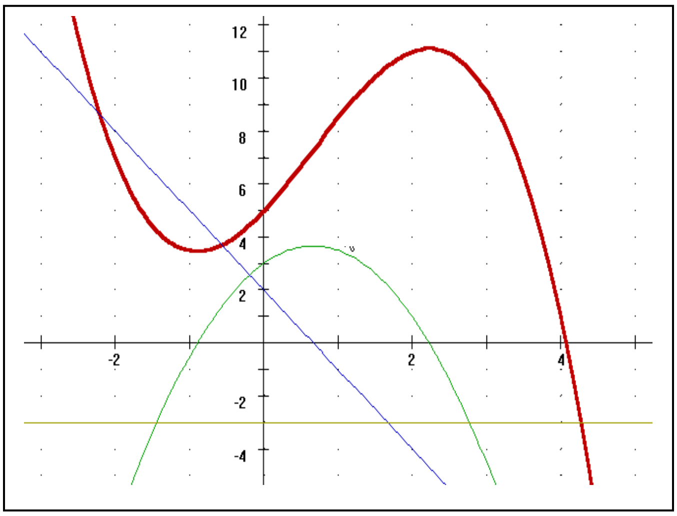
Sattelpunkt



Wir sehen:

Sattelpunkt: 1. Ableitung = 0 und
2. Ableitung = 0

Wendepunkt



Wir sehen:

Wendepunkt:

Die 1. Ableitung hat einen Extremwert, damit
2. Ableitung = 0
und
3. Ableitung ≠ 0

2. Bestimmen von Funktionsgleichungen aus gegebenen Eigenschaften
(Kurvendiskussion rückwärts)

Beispiel: Eine ganzrationale Funktion 3. Grades verläuft durch P(4/3) und Q(1/4) und berührt die x-Achse bei x = 3. Wie heißt die Funktionsgleichung.

Bei Aufgaben dieser Art müssen wir die Funktionsgleichung anhand der vorliegenden Informationen bestimmen. Dazu stellen wir zunächst einmal die allgemeine Gleichung der gesuchten Funktion auf.
Da es sich um eine Funktion 3. Grades handelt, lautet diese $\mathbf{f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d}$.

Es gilt nun die Koeffizienten a, b, c und d zu bestimmen. Damit haben wir 4 Unbekannte.
Wir lösen die Aufgabe, indem wir ein lineares Gleichungssystem mit 4 Gleichungen aufstellen.
Die Informationen für die 4 Gleichungen bietet uns die Aufgabenstellung.

1. Gleichung: Einsetzen der Koordinaten des Punktes P in die allg. Gleichung.

$f(4) = 3 \qquad (1) \qquad 64a + 16b + 4c + d = 3$

2. Gleichung: Einsetzen der Koordinaten des Punktes Q in die allg. Gleichung.

$f(1) = 4 \qquad (2) \qquad a + b + c + d = 4$

3. Gleichung: Da die x-Achse bei 3 berührt wird, liegt dort eine Nullstelle mit den Koordinaten (3/0). Wir setzen diese ein.

$f(3) = 0 \qquad (3) \qquad 27a + 9b + 3c + d = 0$

4. Gleichung: Wenn die x-Achse bei 3 nur berührt, aber nicht geschnitten wird, muss an dieser Stelle ein Extremwert liegen. Es gilt daher $f'(3) = 0$.
Wir bilden die allgemeine Ableitung und setzen in diese ein.
$\mathbf{f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c}$.

$f'(3) = 0 \qquad (4) \qquad 27a + 6b + c = 0$

Nun löst man das Gleichungssystem mit dem Additionsverfahren durch schrittweise Reduzierung der Unbekannten wie auf der folgenden Seite exemplarisch dargestellt.

(Es gibt auch andere Lösungsmethoden. Die Beispiellösung ist einer von vielen anderen möglichen Lösungswegen).

Wir fassen noch mal zusammen:

allgemein: **$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.**
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Es ergeben sich folgende Gleichungen:

$f(4)=3$:	(1)	$64a + 16b + 4c + d$	$= 3$
$f(1) = 4$:	(2)	$a + b + c + d$	$= 4$
$f(3) = 0$:	(3)	$27a + 9b + 3c + d$	$= 0$
$f'(3) = 0$:	(4)	$27a + 6b + c$	$= 0$

Lösung:

(1) – (2) ergibt	(5)	$63a + 15b + 3c$	$= -1$
(1) – (3) ergibt	(6)	$37a + 7b + c$	$= 3$

Wir rechnen weiter mit (4), (5) und (6) und eliminieren c.

(6) – (4) ergibt	(7)	$10a + b$	$= 3$
Multiplikation von (4) mit –3	(4a)	$-81a - 18b - 3c$	$= 0$
(5) + (4a) ergibt	(8)	$-18a - 3b$	$= -1$

Wir rechnen weiter mit (7) und (8) und eliminieren b.

Multiplikation von (7) mit 3 (7a) $30a + 3b = 9$

(7a) + (8) ergibt $12a = 8$

dividiert durch 12 $\mathbf{a} = \frac{2}{3}$

Wir setzen a in (7) ein $\frac{20}{3} + b = 3$

$\mathbf{b = -3\frac{2}{3}}$

Einsetzen von a und b in (6) ergibt **$c = 4$**

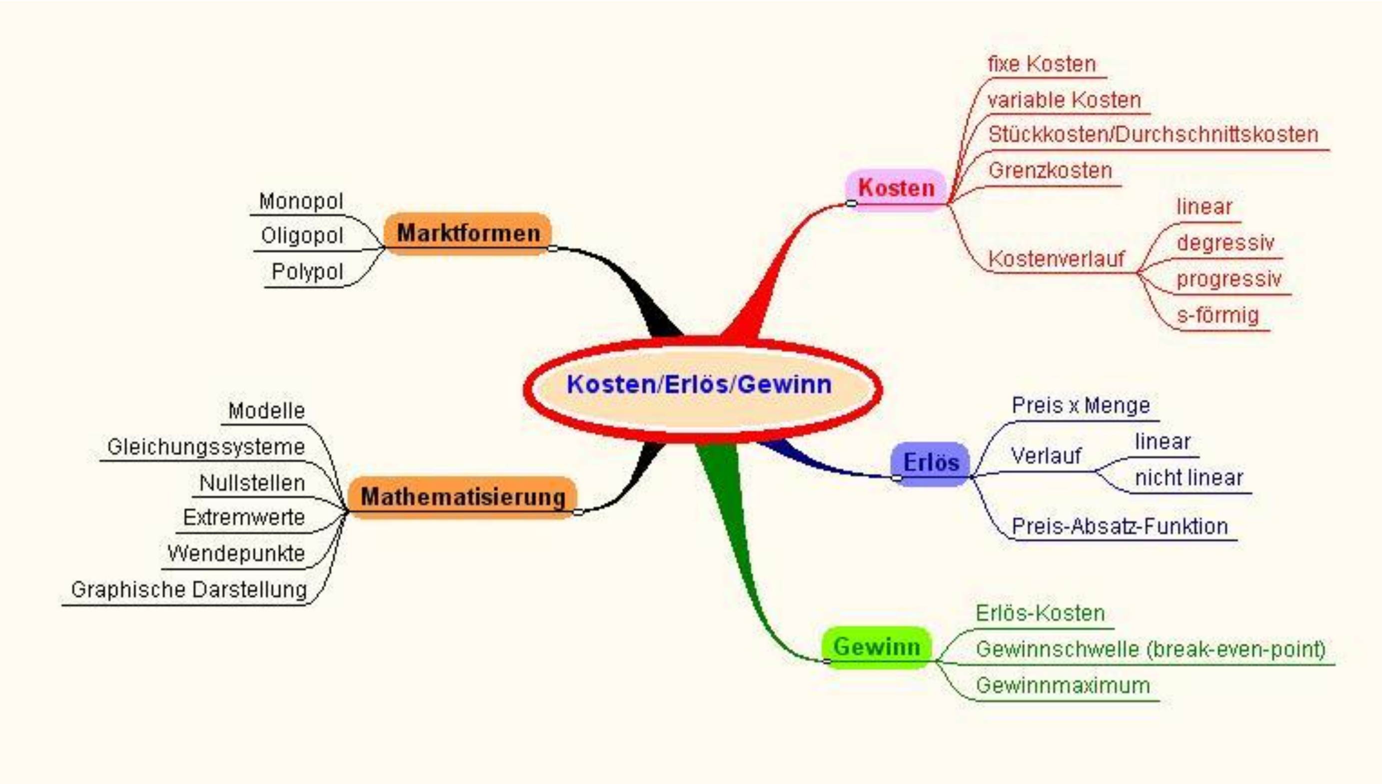
Einsetzen von a,b und c in (2) **$d = 3$**

Die gesuchte Funktionsgleichung lautet: $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3\frac{2}{3}x^2 + 4x + 3$

3. Anwendung der Differentialrechnung in der Wirtschaftslehre

Am Beispiel der Untersuchung von Kosten-, Erlös- und Gewinnfunktionen

Überblick über das Thema anhand einer Mind-Map



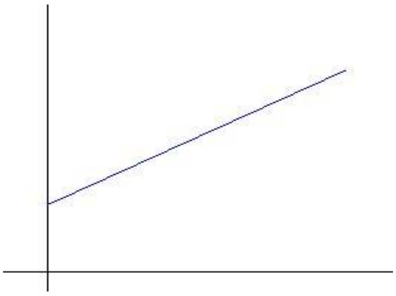
Kostenfunktionen

3.1 Funktionsgleichungen

a) <u>Die Gesamtkostenfunktion</u>

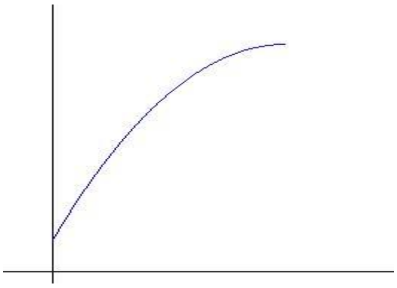
Die Gesamtkostenfunktion beschreibt die Gesamtkosten des Betriebes in Abhängigkeit von der produzierten Menge x. Drei typische Kostenfunktionen sind in der Mathematik von Bedeutung:

1) lineare Kostenfunktionen



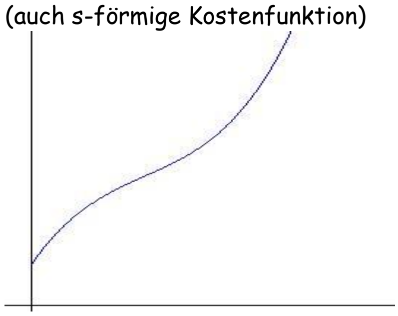
$K(x)=ax+b$

2) Kostenfunktionen 2. Grades



$K(x)=ax^2+bx+c$

3) Kostenfunktionen 3. Grades
(auch s-förmige Kostenfunktion)



$K(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

Die Gesamtkosten bestehen aus den fixen Kosten (die Konstante in der Kostenfunktion), die unabhängig von der produzierten Menge sind und aus den variablen Kosten, die abhängig von der Stückzahl sind. Die Funktion der variablen Kosten erhält man, wenn man die Konstante der Gesamtkostenfunktion weglässt.

b) <u>Die Differentialkostenfunktion (auch Grenzkosten) K´(x)</u>

Die Differentialkosten ergeben sich aus der 1. Ableitung der Gesamtkostenfunktion. Sie geben den Kostenzuwachs(Anstieg) an einer bestimmten Stelle der Kostenfunktion an.
Die ´Grenzkosten´ geben den Kostenzuwachs an, wenn eine Einheit x zusätzlich produziert wird. Die Grenzkosten entsprechen nicht exakt den Differentialkosten, da die Grenzkosten die Differenz zwischen zwei Kostenpunkten ausdrücken, die Differentialkosten aber den Anstieg der Kostenfunktion an einer Stelle beschreiben.

c) <u>Die Stück- oder Durchschnittskostenfunktion k(x)</u>

Als Stückkosten bezeichnet man die durchschnittlichen Kosten einer produzierten Einheit. Man erhält sie, wenn man die Gesamtkosten durch die produzierte Menge dividiert.

Bsp.: Gesamtkosten 12 000 €, Stückzahl 200: Stückkosten 60 € pro Stück
Bsp.: Gesamtkosten: $K(x)=x^3-9x^2+25x+50$, Stückkosten: $k(x)=x^2-9x+25+50/x$

d) <u>Die variablen Stückkosten $k_v(x)$</u>
Die variablen Stückkosten erhält man, wenn man die variablen Kosten durch die produzierte Menge dividiert.

3.2 Untersuchung der Kostenfunktion

a) Wendepunkt der s-förmigen Kostenfunktion

Bedingung: $K''(x) = 0$

Der Wendepunkt bezeichnet die Menge, bei der der Kostenanstieg am geringsten ist. An dieser Stelle hat die Kostenfunktion den geringsten Anstieg.

Bsp.: $K(x) = x^3 - 9x^2 + 25x + 50$, $K'(x) = 3x^2 - 18x + 25x$ $K''(x) = 6x - 18$
$6x-18 = 0$ $x = 3$ Der Wendepunkt liegt bei 3 ME.
Durch den Wendepunkt kann das Krümmungsverhalten der Kostenfunktion beschrieben werden, welches den degressiven Teil (Rechtskurve) und den progressiven Teil (Linkskurve der Kostenfunktion) Bezeichnet.

b) Das Betriebsminimum (kurzfristige Preisuntergrenze)

Bedingung: $k_v'(x) = 0$ oder $K'(x) = k_v(x)$

Bei dieser Menge sind die variablen Stückkosten am niedrigsten. Wenn ein Erlös erzielt werden kann, der den variablen Stückkosten bei dieser Menge entspricht, dann kann der Betrieb genau seine variablen Kosten decken. Kurzfristig kann ein Betrieb noch weiterproduzieren, wenn es gelingt, mindestens die variablen Kosten zu decken. Bei jeder anderen produzierten Stückzahl muss der Preis bereits höher liegen, da auch die variablen Stückkosten höher sind.

Die kurzfristige Preisuntergrenze ergibt sich durch Einsetzen des Betriebsminimums in die Funktion der variablen Stückkosten.

Bsp.: $k_v(x) = x^2 - 9x + 25$ $k_v'(x) = 2x - 9$ $2x - 9 = 0$ $x = 4{,}5$ (Betriebsminimum)
$k_v(4{,}5) = 4{,}75$ (kurzfristige Preisuntergrenze)

c) Das Betriebsoptimum (langfristige Preisuntergrenze)

Bedingung: $k'(x) = 0$ oder $K'(x) = k(x)$

Bei dieser Menge sind die gesamten Stückkosten am geringsten. Wenn ein Erlös erzielt werden kann, der den Stückkosten bei dieser Menge entspricht, dann kann der Betrieb genau seine gesamten Kosten decken. Langfristig muss der Preis also mindestens so hoch sein, wie das Minimum der Stückkosten. Bei jeder anderen Produktionsmenge sind die Stückkosten bereits wieder höher.

Die langfristige Preisuntergrenze ergibt sich durch Einsetzen des Betriebsoptimums in die Funktion der Stückkosten.

Bsp.: $k(x) = x^2 - 9x + 25 + 50/x$ $k'(x) = 2x - 9 - 50/x^2$ $2x - 9 - 50/x^2 = 0$
$x = 5{,}37$ (Betriebsoptimum) $k(5{,}37) = 14{,}82$ (langfristige Preisuntergrenze)

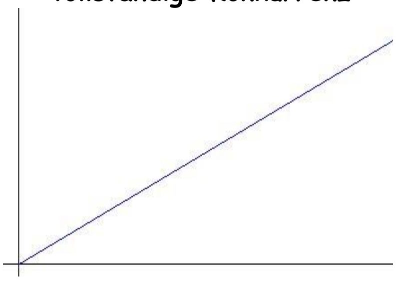
Erlösfunktionen

3.3 Funktionsgleichungen

a) <u>Die Erlösfunktion E(x)</u>

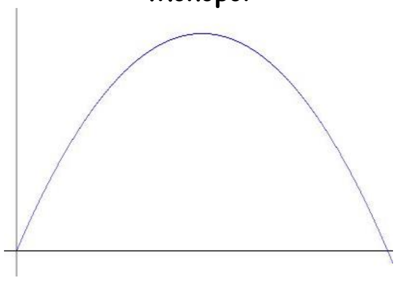
Der Erlös (oder auch Ertrag oder Umsatz) ergibt sich aus dem Produkt von Preis und Menge. Man unterscheidet zwei Modelle für Erlösfunktionen:

1) lineare Erlösfunktionen vollständige Konkurrenz



$E(x) = ax$

2) Erlösfunktionen 2. Grades Monopol

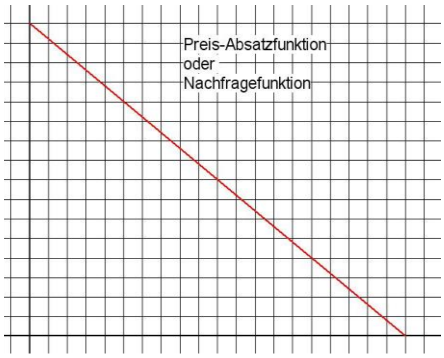


$E(x)=ax^2+bx$

zu 1) Im Modell der vollständigen Konkurrenz ist der Preis ein Datum (unveränderlich). Deshalb verläuft die Erlösfunktion linear.

Bsp.: Preis = 15 € Erlös = 15x

zu 2) Die Erlösfunktion eines monopolistischen Anbieters ergibt sich aus der Preis-Absatz-Funktion (Nachfragefunktion). Diese verläuft im Normalfall von links oben nach rechts unten (Je höher der Preis, desto geringer die Nachfrage; je geringer der Preis, desto höher die Nachfrage). Wenn die Preisfunktion linear verläuft, ist die Erlösfunktion eine Parabel 2. Grades.



Bsp.: bei einem Preis von 10 € werden 100 Stück verkauft, bei einem Preis von 15 € werden 50 Stück verkauft. Bei einer linearen Preisfunktion (Preis auf der y-Achse, Menge auf der x-Achse) ergibt sich: $P(x) = -0{,}1x + 20$. Somit heißt die Erlösfunktion: $E(x) = -0{,}1x^2 + 20x$

b) <u>Die Erlöszuwachsfunktion (Grenzerlös) E´(x)</u>

Die erste Ableitung der Erlösfunktion gibt den Anstieg der Erlösfunktion an und gibt somit genau den Preis an, wenn als Mengenzuwachs jeweils eine Einheit genommen wird.

3.4 Untersuchung der Erlösfunktion

Einzig wichtiger Untersuchungsgegenstand ist die Bestimmung des **Erlösmaximums**. Das Erlösmaximum ergibt sich, wenn man die erste Ableitung der Erlösfunktion gleich Null setzt.
Ergebnis ist die Menge (x), bei der der Erlös am größten ist
Bei einer linearen Erlösfunktion liegt das Erlösmaximum an der Kapazitätsgrenze. Erlösmaximum und Gewinnmaximum liegen normalerweise an verschiedenen Stellen.

Die Gewinnfunktion

3.5 Die Funktionsgleichung

Gewinn = Erlös – Kosten. Die Gewinnfunktion erhält man durch Subtraktion der Kostenfunktion von der Erlösfunktion. Bei einer Kostenfunktion 3. Grades erhält man auch eine Gewinnfunktion 3. Grades.

Beispiele: 1) $E(x) = 5x^2$, $K(x) = 6x + 10$ ➔ $G(x) = 5x^2 - (6x + 10) = 5x^2 - 6x - 10$

2) $E(x) = 180x$, $K(x) = x^3 - 5x^2 + 10x + 50$ ➔ $G(x) = 180x - (x^3 - 5x^2 + 10x + 50) =$
$G(x) = -x^3 + 5x^2 + 170x - 50$

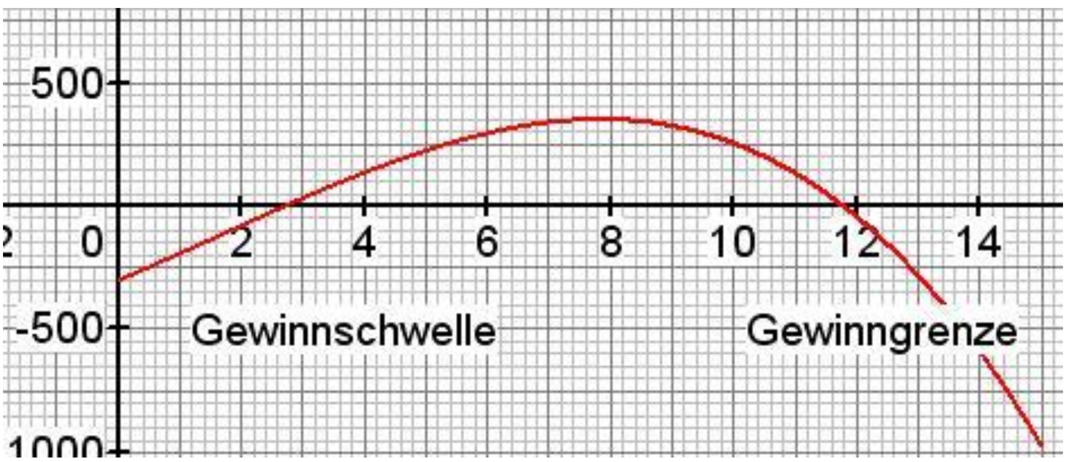
4 Untersuchung der Gewinnfunktion

<u>a) Gewinnschwelle (break-even-point) und Gewinngrenze</u>

Bedingung: $G(x) = 0$ oder $E(x) = K(x)$

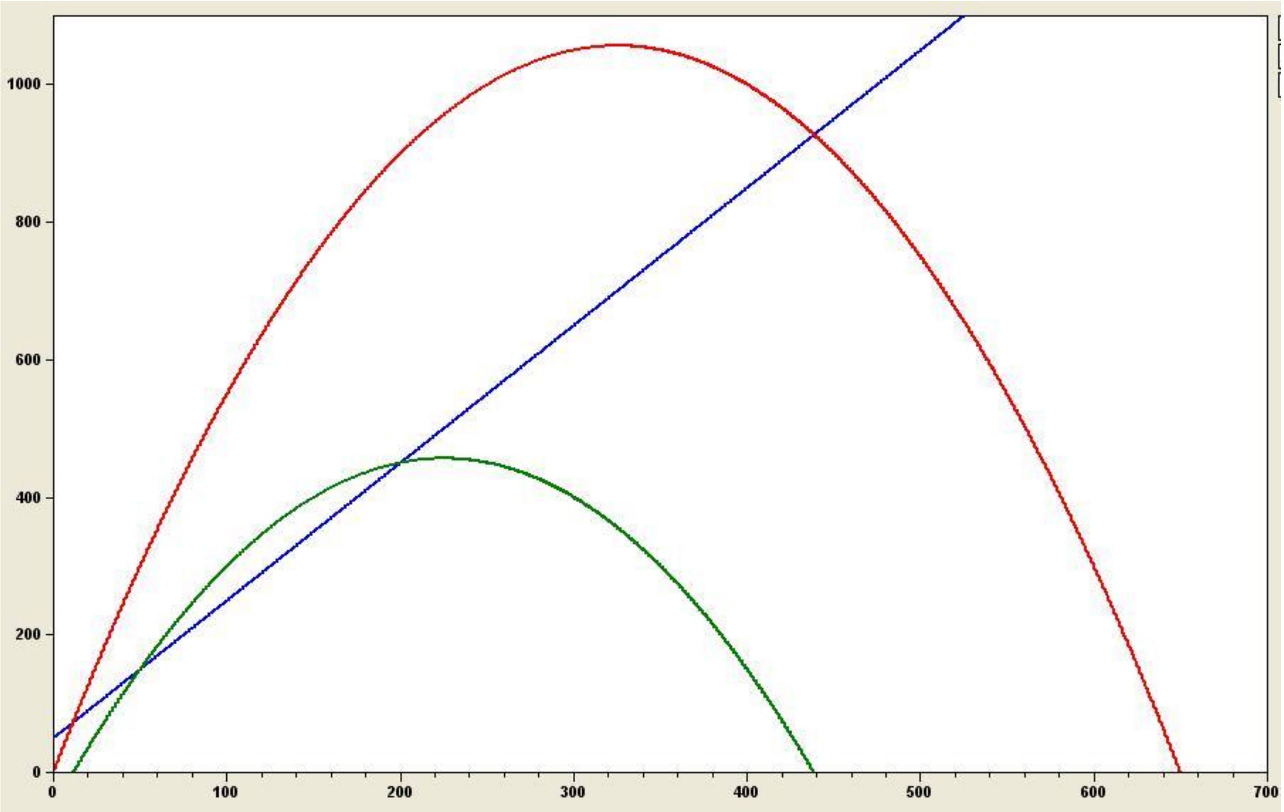
Als Gewinnschwelle bezeichnet man diejenige Menge, die verkauft werden muss, damit sich Kosten und Erlös decken. Ab dieser Menge beginnt die Gewinnzone. Wenn die Kosten stärker steigen als die Erlöse, gibt es ein Ende dieser Gewinnzone (Gewinngrenze). (In manchen Lehrbüchern ist auch von Nutzenschwelle und Nutzengrenze die Rede.)
Für die Berechnung von Gewinnschwelle und Gewinngrenze ist bei einer Gewinnfunktion 3. Grades ein Näherungsverfahren anzuwenden.

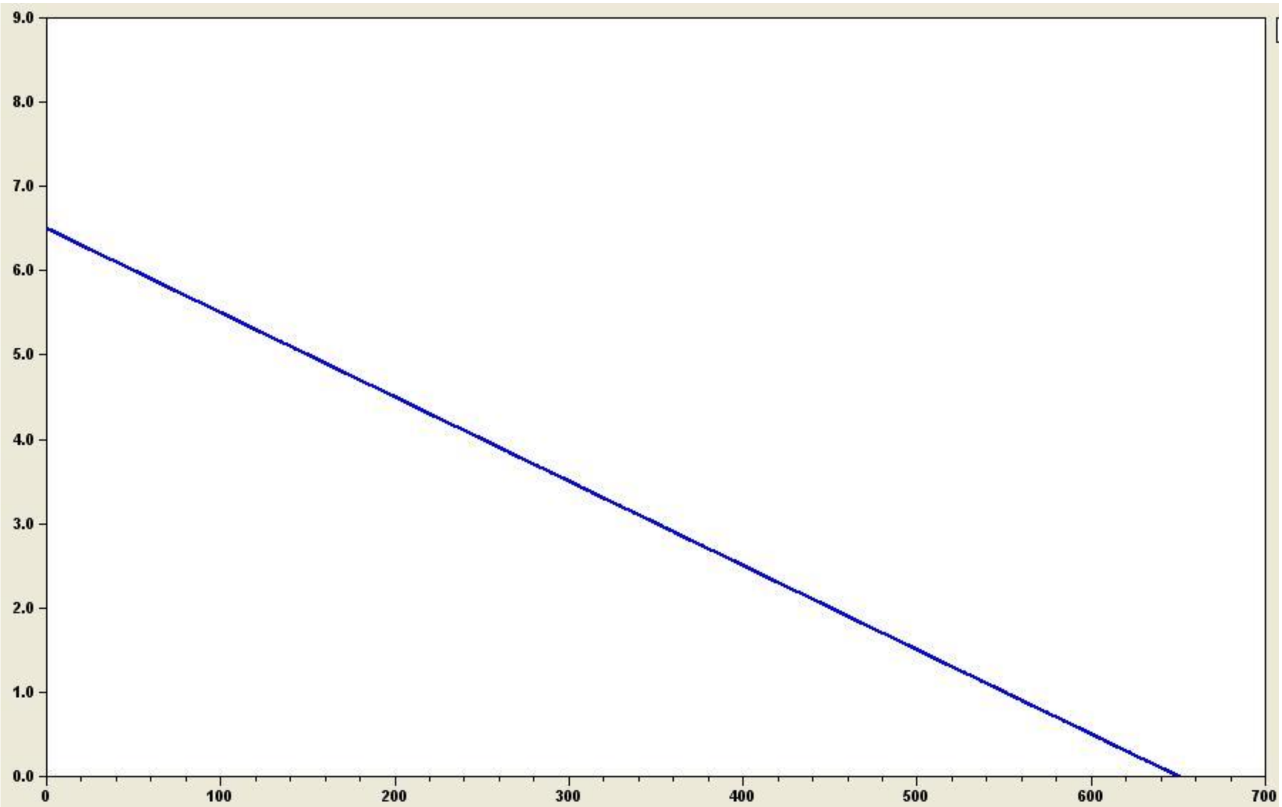
b) <u>Das Gewinnmaximum</u>
Bedingung: $G'(x) = 0$ oder $E'(x) = K'(x)$
Das Gewinnmaximum ist diejenige Menge, bei der der Gewinn am größten ist. An dieser Stelle ist der Abstand zwischen Kosten und Erlösfunktion am größten. Im Falle einer linearen Erlösfunktion und einer linearen Kostenfunktion liegt das Gewinnmaximum an der Kapazitätsgrenze.



Darstellung des Gesamtmodells anhand einer linearen Kostenfunktion und einer parabelförmigen Erlösfunktion

(normalerweise ist es nicht günstig, die Preis-Absatz-Funktion mit in das Schaubild einzuzeichnen, da die Maßeinheiten oftmals sehr unterschiedlich sind.)





4. Extremwertaufgaben

Einführendes Beispiel

Die Zahl 500 soll in zwei Summanden zerlegt werden, so dass das Produkt der beiden Summanden maximal wird.

Extremwertaufgaben erkennt man daran, dass es in der Aufgabenstellung darum geht, etwas zu maximieren oder zu minimieren. Hier handelt es sich um eine Anwendung der Differentialrechnung, da man Maxima oder Minima durch Nullsetzen der ersten Ableitung errechnen kann.

Lösungsweg: Der beschriebene Lösungsweg kann für alle Extremwertaufgaben angewendet werden.

Wir bezeichnen die beiden Summanden als S1 und S2, das Produkt als P:

1. Hauptbedingung	P (S1, S2) = S1 * S2 | soll maximal werden
2. Nebenbedingung	500 = S1 + S2
3. Auflösen nach einer Variablen	500 – S2 = S1
4. Aufstellen der Zielfunktion, so dass diese nur noch von einer Variablen abhängig ist.	
	P(S2) = (500 – S2) * S2
	P(S2) = 500*S2 – S2²
5. Ableitung bilden	P'(S2) = 500 – 2*S2
6. Nullsetzen	500 – 2*S2 = 0
7. Auflösen	**S2 = 250**
8. Durch Einsetzen von S2 in die Nebenbedingung ergibt sich, dass **S1 = 250**	

Bei vielen Extremwertaufgaben wird man feststellen, dass die optimale Fläche oft das Quadrat oder der Kreis, der optimale Körper oft der Würfel oder die Kugel ist.

2. Beispiel

Aus Maschendraht mit der Länge 48 Meter soll ein rechteckiges Grundstück mit möglichst großer Fläche eingezäunt werden.
Wie sind die Maße des Grundstückes a und b zu wählen?

1. Hauptbedingung	F(a,b) = a * b (soll maximal werden)
2. Nebenbedingung	48 = 2a + 2b
3. Auflösen nach einer Variablen	24 – a = b
4. Aufstellen der Zielfunktion, so dass diese nur noch von einer Variablen abhängig ist.	
	F(a) = a * (24 – a)
	F(a) = 24a – a²
5. Ableitung bilden	F'(a) = 24 – 2a
6. Nullsetzen	24 – 2a = 0
7. Auflösen	24 = 2a → **a = 12**

Durch Einsetzen von a in die Nebenbedingung ergibt sich, dass **b = 12**

3. Beispiel

Eine zylinderförmige Konservendose soll mit möglichst wenig Blech so hergestellt werden, dass sie 1 Liter Inhalt hat. Wie sind die Abmessungen der Dose zu wählen, damit der Materialverbrauch möglichst gering wird?

1. Hauptbedingung $O(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h$ (minimieren)
2. Nebenbedingung $\pi r^2 h = 1000\ cm^3$ (1 Liter)
3. Auflösen nach einer Variablen $h = \frac{1000}{\pi r^2}$
4. Aufstellen der Zielfunktion, so dass diese nur noch von einer Variablen abhängig ist.

$O(r) = 2\pi r^2 + \frac{2\pi r \cdot 1000}{\pi r^2}$ kürzen

$O(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$

5. Ableitung bilden $O'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2}$
6. Nullsetzen $4\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0$

$4\pi r^3 - 2000 = 0$

7. Auflösen $r^3 = 159{,}15 \rightarrow$ **r = 5,42**

Durch Einsetzen von r in die Nebenbedingung ergibt sich, dass **h = 10,84**

Damit beträgt der minimale Materialverbrauch 553,73 cm²

5. Aufgabenteil

Kurvendiskussionen
Erstellen für die Funktionen mit den folgenden Funktionsgleichungen eine Kurvendiskussion mit allen Punkten des Leitfadens. Nullstellen sind, soweit möglich, mit algebraischen Verfahren zu bestimmen (Ausklammern, Substitution, Wurzelziehen). Wenn bei Gleichungen 3. Grades eine ganzzahlige Nullstelle gefunden wird, so ist eine Polynomdivision durchzuführen. In den Fällen, in denen es keine ganzzahligen (bzw. rationalen) Nullstellen gibt und algebraische Verfahren nicht angewendet werden können, müssen die Nullstellen durch Näherungsverfahren bestimmt werden.
1. $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$.
2. $f(x) = x^3 - 3x + 2$.
3. $f(x) = - x^4 + 2x^2 - 1$.
4. $f(x) = x^5 – 1{,}2x^3 – 0{,}3125x$.
5. $f(x) = x^4 - 3x^3 + 4x$.
6. $f(x) = 0{,}5x^4 – 1{,}5x^3 - 3x^2 + 4x$.
7. $f(x) = 0{,}25x^4 – 0{,}25x^3 - 2x^2 + 3x$.
8. $f(x) = -0{,}5x^5 + 2x^3 + 1$.
9. $f(x) = 0{,}1x^5 – 0{,}5x^3 – 0{,}5x^2$.
10. $f(x) = 0{,}0625x^6 – 0{,}75x^4 + 3x^2$.

Bestimmen von Funktionsgleichungen aus gegebenen Eigenschaften
Aufgabe: Stellen Sie zu den folgenden Aufgaben ein lineares Gleichungssystem auf und bestimmen Sie die Funktionsgleichung. Machen Sie ggf. eine Probe.
1. Eine Funktion 3. Grades hat in H(-2/0) ein Maximum und in W(-1/-2) einen Wendepunkt.
2. Eine Funktion 3. Grades geht durch den Ursprung, hat im Punkt P(-1/-$5\frac{1}{3}$) eine waagerechte Tangente und bei x = 2 einen Wendepunkt.
3. Eine achsensymmetrische Funktion 4. Grades hat eine Nullstelle bei x = 3 und einen Hochpunkt bei H(2/2,5).
4. Eine Funktion 3. Grades geht durch A(0/12), hat in W(3/-6) einen Wendepunkt und bei x = 2 eine waagerechte Tangente.
5. Eine Funktion 4. Grades hat den Wendepunkt W(-2/-4), geht durch den Ursprung und durch den Punkt P(2/12). Die Tangente im Wendepunkt hat die Steigung 4.
6. Eine Funktion 4. Grades hat einen Tiefpunkt bei T(-1/-1) und in S(2/1) einen Sattelpunkt.
7. Eine Funktion 3. Grades hat eine Nullstelle bei x = -2 und einen Extremwert bei H(-1/4). Ein weiterer Punkt liegt bei (3/20).
8. Gesucht ist eine Funktion 4. Grades mit Nullstellen bei x = -3 und x = 0, ein Extremwert liegt bei T(2/0) und ein weiterer Punkt bei (-2/-8).
9. Eine zum Ursprung punktsymmetrische Funktion 5. Grades hat einen Sattelpunkt bei S(1/8).
10. Eine Funktion 4. Grades berührt die x-Achse bei x = 2 und hat Wendepunkte im Ursprung und bei x = 1,5.

Betriebswirtschaftliche Aufgabenstellungen

1. Die Kosten und Erlöse für ein Produkt eines Industriebetriebes ergeben sich aus folgender Tabelle:

Stückzahl (x)	Kosten	Erlös	Gewinn	
0	500	0		
5				
10	850	850		
15				
20	1300	1400		
25				
30	3350	1650		

a) Die Kostenfunktion ist eine Funktion 3. Grades. Bestimmen Sie diese.
b) Die Erlösfunktion ist eine Funktion 2. Grades. Bestimmen Sie diese.
c) Ergänzen Sie die fehlenden Werte in der Tabelle.
d) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung für den Gewinn.
e) Berechnen Sie die Gewinnzone des Betriebes auf 2 Dezimalstellen genau.
f) Berechnen Sie das Gewinnmaximum
g) Welche Entscheidung sollte der Anbieter treffen, damit er das Gewinnmaximum erreichen kann?
h) Tragen Sie in der 4. Spalte die Kosten pro Stück (Stückkosten) ein. Das Minimum der Stückkosten bestimmt die langfristige Preisuntergrenze des Betriebes und wird als Betriebsoptimum bezeichnet. Berechnen Sie die dazugehörige Stückzahl und die langfristige Preisuntergrenze.

2. Ein kleines Unternehmen stellt spezielle Überwachungsmonitore im Bereich der Medizintechnik her. Der Kostenverlauf der Produktion kann annähernd durch die Kostenfunktion $K(x) = x^3 – 10x^2 + 43x + 72$ beschrieben werden.
Die Kapazitätsgrenze des Unternehmens liegt bei 20 Geräten pro Monat.

a) Legen Sie eine Tabelle an und berechnen Sie die Werte von 0 bis 20 Stück für
aa) Die Gesamtkosten K
ab) die Grenzkosten (Kostenzuwachs pro Einheit) K´
ac) die Durchschnittskosten k
ad) die variablen Durchschnittskosten k_v
ae) die fixen Stückkosten k_{fix}
b) Geben Sie zu allen oben genannten Funktionen die Funktionsgleichungen an
c) Berechnen Sie
ca) den Wendepunkt der Gesamtkosten
cb) das Betriebsminimum und die kurzfristige Preisuntergrenze
cc) das Betriebsoptimum und die langfristige Preisuntergrenze

Interpretieren Sie alle errechneten Größen betriebswirtschaftlich.
d) Aufgrund der Konkurrenzsituation muss der Anbieter einen Verkaufspreis von 50 GE akzeptieren. Berechnen Sie die bei diesem Preis entstehende Gewinnsituation des Unternehmens (Gewinnzone, Gewinnmaximum)
e) Infolge der feindlichen Übernahme der beiden Konkurrenzanbieter wird das Unternehmen zum Monopolisten und sieht sich der Preis-Absatz-Funktion $p(x) = -5x + 100$ gegenüber.
Berechnen Sie Gewinnsituation unter diesen Bedingungen.

3. Ein Unternehmen rechnet für die Produktion eines Gutes mit variablen Kosten in Höhe von
   $K_v(x) = 0{,}6x^3 – 3{,}6x^2 + 10{,}4x$
   Die Fixkosten betragen 60 GE.

a) Berechnen Sie das Betriebsminimum und die kurzfristige Preisuntergrenze.
b) Berechnen Sie die langfristige Preisuntergrenze und das Betriebsoptimum.

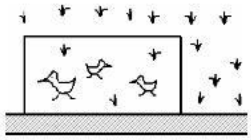
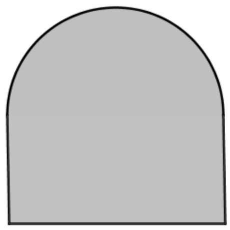
4. Gegeben ist die Preis-Absatz-Funktion p und die Kostenfunktion K mit
   $p(x) = -4x + 28$ und $K(x) = 12x + 10$

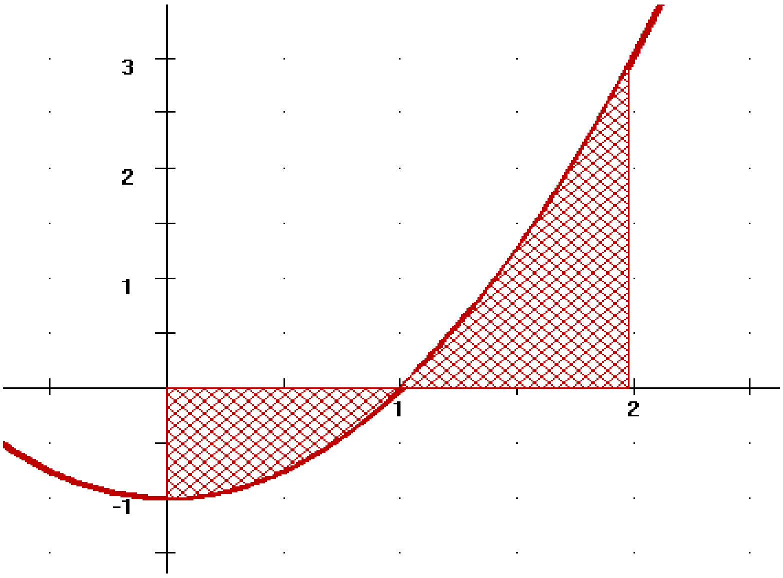
a) Bei welcher Ausbringungsmenge wird der Erlös maximal? Wie hoch ist er?
b) Stellen Sie die Gewinnfunktion auf und bestimmen Sie rechnerisch die gewinnmaximale Absatzmenge und den maximalen Gewinn.
c) Zeichnen Sie die Graphen der Erlös- und der Kostenfunktion.

5. In einem Angebotsmonopol sind die Preis-Absatz-Funktion p und die Gesamtkostenfunktion K mit $p(x) = -3x + 21$ und $K(x) = 0{,}5x^3 – 4{,}5x^2 + 15x + 5$ gegeben.

a) Bestimmen Sie die Gewinnzone.
b) Bestimmen Sie die gewinnmaximale Absatzmenge, das Gewinnmaximum und den gewinnmaximalen Preis.

6. Die Gesamtkosten eines Herstellers von Elektrogeräten werden durch eine Funktion 3. Grades beschrieben. Die Fixkosten betragen 720 GE und die durchschnittlichen variablen Kosten 50 GE bei einer Menge von 100. Die Grenzkosten (K') bei einer Ausbringungsmenge von 1 ME betragen 48,03 GE. Die gesamten Durchschnittskosten erreichen bei einer Ausbringungsmenge von 20 eine Höhe von 70. Der Verkaufspreis liegt bei 53 GE. Bestimmen Sie
   a) Die Funktionsgleichungen der Kosten- und Erlösfunktion.
   b) das Betriebsminimum
   d) Die gewinnmaximale Menge und die Höhe des Gewinnmaximums.

Extremwertaufgaben	
1. Bauer Menzel hat noch 60 m Maschendraht übrig. Daraus soll ein rechteckiger Hühnerstall mit möglichst großer Fläche eingezäunt werden. An einer Seite des Hühnerstalls befindet sich eine Mauer. Wie sind die Maße des Hühnerstalls a und b zu wählen?	
2. Ein Torbogen hat die Form einer Parabel mit der Gleichung $\mathbf{f(x) = -x^2 + 4}$ Er soll so gemauert werden, dass ein rechteckiges Einfahrtstor mit möglichst großer Querschnittsfläche entsteht. Berechnen Sie die Abmessungen und die Querschnittsfläche.	
3. Eine zylinderförmige Getränkedose mit einem Inhalt von 0,5 Liter hat die Maße h = 15 und r = 3,257 cm. Die Dose wird aus Weißblech hergestellt. Stellen Sie den Materialverbrauch in cm^2 fest und berechnen Sie, ob die Dose hinsichtlich des Materialverbrauchs optimal ist.	
4. Das Tiefbauamt geht bei der Planung eines Abwasserkanals von einem benötigten Querschnitt (Durchfluss) von 5 m^2 aus. Der Kanal soll die Form eines Rechteckes mit aufgesetztem Halbkreis haben. Wie sind die Maße zu wählen, damit der Umfang des Kanals und damit die Reibung möglichst gering wird ? (Abmessungen: Höhe des Rechteckes a und Radius des Halbkreises r)	 <u>Hinweis:</u> Lösen Sie die Nebenbedingung nach a auf!
5. Ein Designer möchte einen trichterförmigen Sektkelch entwerfen. Die Seitenlänge des Kelches ist mit 8 cm vorgegeben. a) Für welche Maße des Sektglases wird das Volumen maximal? Beurteilen Sie die Form des Glases. b) An welcher Stelle muss der Eichstrich angebracht werden, wenn dieser für eine Füllmenge von 0,1 Liter gelten soll?	



Integralrechnung

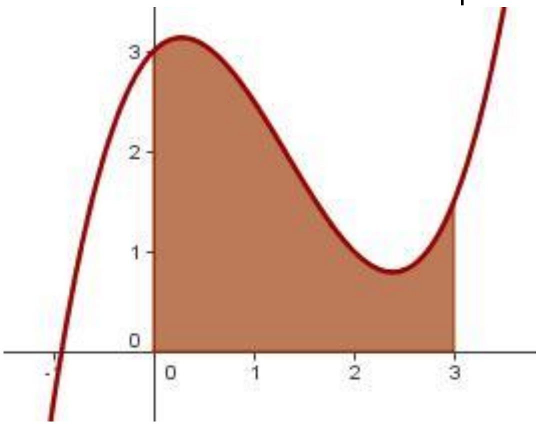
1. Einführung

Integralrechnung und Differentialrechnung sind die beiden Hauptteile der Analysis. Die **Differentialrechnung** beschäftigt sich mit dem Problem der **Steigung** von Funktionsgraphen.

Die Aufgabe der **Integralrechnung** ist die **Berechnung von nicht geradlinig begrenzten Flächen.**

Beispiel

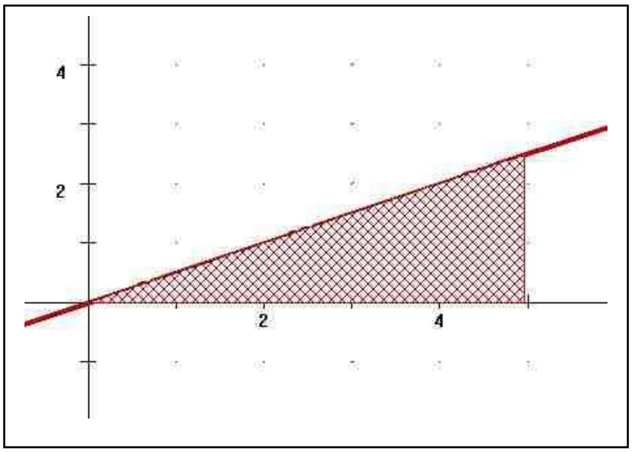
Berechne die schraffierte Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse.



Rechnerisch gesehen, ist die Integralrechnung die Umkehrung der Differentialrechnung.
In der Differentialrechnung wurde der Begriff der Steigung einer Kurve an einer bestimmten Stelle zunächst durch eine Näherungslösung hergeleitet. Dabei wurde die Steigung der Tangente an der Stelle x_0 durch die Steigung einer Sekanten zwischen x_0 und einem weiteren Punkt angenähert. Daraus entwickelte sich dann der Grenzwert des Differenzenquotienten für $h \to 0$, der zum Begriff der 1. Ableitung führte.

Der Integralrechnung wollen wir uns auf ähnliche Weise nähern. Zunächst betrachten wir einfache Flächen, die wir mit den Methoden der Mittelstufe mit Hilfe von Dreiecksflächen, Rechteckflächen und Trapezflächen berechnen können. Anschließend wenden wir diese Methoden als Näherungslösungen auf nicht geradlinige Flächen an, um danach den Begriff des Integrals einzuführen.

2. Geradlinig begrenzte Flächen

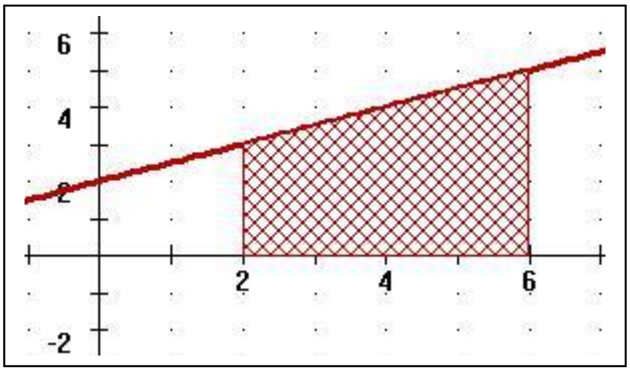


a) Berechne die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f(x) = 0,5x und der x-Achse zwischen dem Koordinatenursprung und x = 5.

Lösung: Die Fläche ist ein Dreieck, welches wir mit der Formel $F = \frac{g \cdot h}{2}$ berechnen.

g = 5, h = f(5) = 2,5

$$F = \frac{5 \cdot 2{,}5}{2} = 6{,}25$$



b) Berechne die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f(x) = 0,5x +2 und der x-Achse zwischen x = 2 und x = 6.

Lösung: Die Fläche ist ein Trapez, welches wir mit der Formel $F = g \cdot \frac{a+b}{2}$ berechnen.

g = 4, a = f(2) = 3, b= f(6) = 5

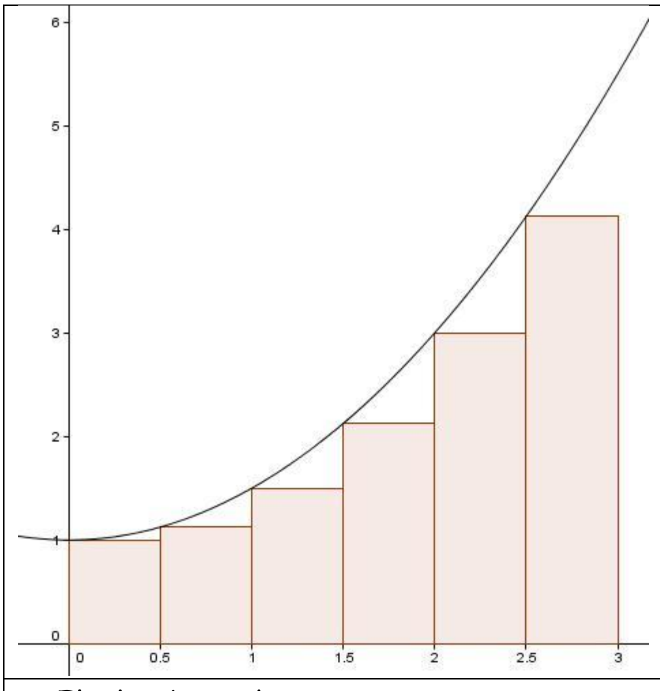
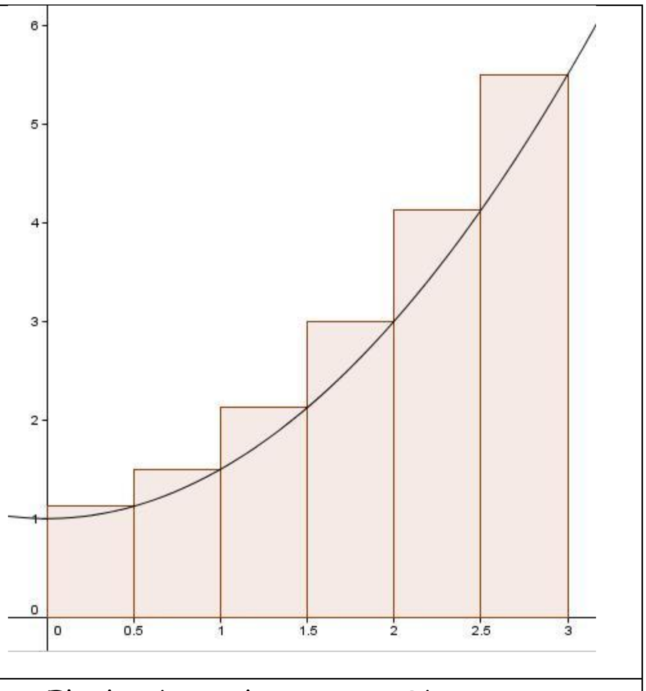
$$F = 4 \cdot \frac{3+5}{2} = 16$$

Eine andere Lösung wäre es , die Fläche als Differenz zwischen dem Trapez zwischen 0 und 6 und dem Trapez zwischen 0 und 2 zu berechnen.

3. Näherungsverfahren

3.1 Die Streifenmethode (Rechteckobersummen und Rechteckuntersummen)

Bereits die griechischen Mathematiker (Archimedes) hatten eine Methode entwickelt, mit der sie Flächenberechnungen von nicht geradlinig begrenzten Flächen durchführen konnten. Sie teilten dazu die zu berechnende Fläche in mehrere Rechtecke (Streifen) ein und berechneten die Flächensumme dieser Rechtecke. Je schmaler die Streifen werden, desto mehr Rechtecke gibt es und umso genauer wird das Ergebnis. Je nachdem, ob man die Höhe der Rechecke am linken oder rechten Rand des Funktionsgraphen orientiert, erhält man Rechteckober- oder untersummen.

	
Flächenberechnung mit Untersummen	Flächenberechnung mit Obersummen

Beispiel für die Berechnung der Fläche zwischen der Funktion $f(x) = 0{,}5x^2 + 1$ und der x-Achse im Bereich 0 bis 3 mit jeweils 6 Rechecken.

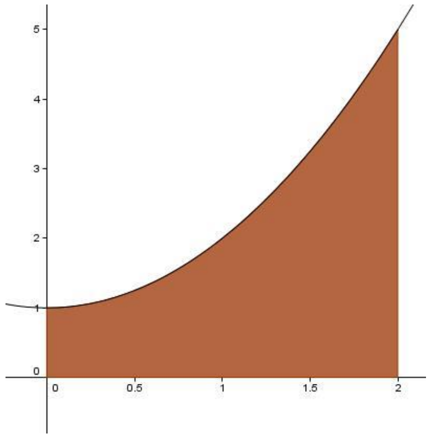
Näherungsergebnis bei 6 Rechtecken:
Ergebnis Untersummen: 6,44
Ergebnis Obersummen: 8,69

Näherungsergebnis bei 12 Rechtecken:
Ergebnis Untersummen: 6,95
Ergebnis Obersummen: 8,08

Wir sehen: Je mehr Rechtecke verwendet werden, desto mehr nähern sich die Ergebnisse der Unter- und Obersummen an.

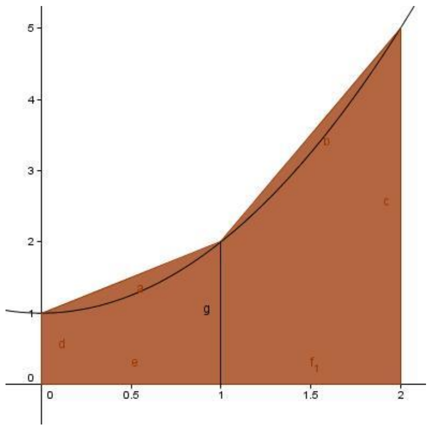
3.2 Das Trapezsummenverfahren

Wenn man Rechteckober- und Untersummen berechnet und jeweils den Durchschnittswert der Summe beider Ergebnisse nimmt, erhält man denselben Wert, als wenn man statt einem Rechteck ein Trapez eingezeichnet hätte. Deshalb kann man anstatt mit Unter- und Obersummen von Rechtecken auch gleich mit Trapezen rechnen.



<u>Aufgabe:</u>
Berechne die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion $f(x) = x^2 + 1$ und der x-Achse im Bereich $x = 0$ und $x = 2$.

<u>Lösung:</u> Wir teilen die Fläche in <u>zwei Trapeze</u> ein. Die Grundseite eines Trapezes ist jeweils die Hälfte der Gesamtbreite der Fläche.
Die Seitenlängen der Trapeze ergeben sich aus den Funktionswerten des Graphen.



Trapez 1: $g = 1$, $a = f(0) = 1$, $b = f(1) = 2$

$$F = 1 \cdot \frac{1+2}{2} = 1{,}5$$

Trapez 2: $g = 1$, $a = f(1) = 2$, $b = f(2) = 5$

$$F = 1 \cdot \frac{2+5}{2} = 3{,}5$$

Gesamtfläche: 1,5 + 3,5 = 5

Diese Näherungslösung ist größer als die tatsächliche Fläche, da die Kurve nach unten durchhängt. Eine genauere Lösung bekommen wir, wenn wir die Anzahl der Trapeze erhöhen. Z. B. <u>vier Trapeze</u>:

T1: $g = 0{,}5$ $a = f(0) = 1$, $b = f(0{,}5) = 1{,}25$ $$F = 0{,}5 \cdot \frac{1+1{,}25}{2} = 0{,}5625$$

T2: $g = 0{,}5$ $a = f(0{,}5) = 1{,}25$, $b = f(1) = 2$ $$F = 0{,}5 \cdot \frac{1{,}25+2}{2} = 0{,}8125$$

T3: $g = 0{,}5$ $a = f(1) = 2$, $b = f(1{,}5) = 3{,}25$ $$F = 0{,}5 \cdot \frac{2+3{,}25}{2} = 1{,}3125$$

T4: $g = 0{,}5$ $a = f(1{,}5) = 3{,}25$, $b = f(2) = 5$ $$F = 0{,}5 \cdot \frac{3{,}25+5}{2} = 2{,}0625$$

Gesamtfläche: 0,5625 + 0,8125 + 1,3125 + 2,0625 = 4,75

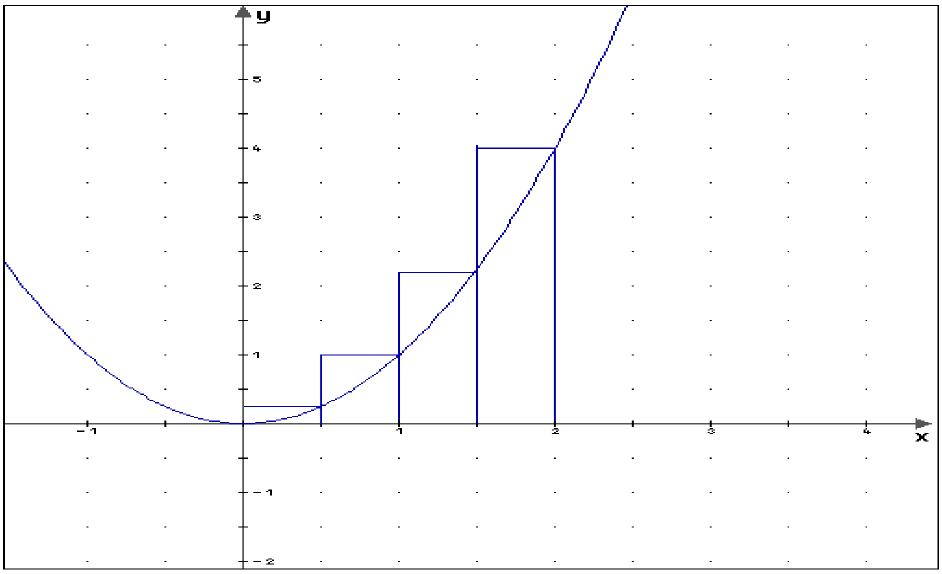
Je mehr Trapeze berechnet werden, desto mehr nähert man sich der tatsächliche Lösung.
Die tatsächliche Lösung beträgt **4.**

3.3 Flächenberechnung als Grenzwertrechnung (Exkurs)

Auf der vorherigen Seite wurde deutlich, dass man die Fläche umso genauer berechnen kann, je mehr Teilflächen man bildet. Das heißt aber, dass die Fläche exakt berechnet werden kann, wenn man die unendlich viele Teilflächen hat. Diese Überlegung führt zu einer Grenzwertbetrachtung, wie wir sie bei der Einführung in die Differentialrechnung kennen gelernt haben. Der griechische Mathematiker **Archimedes** hat dazu einen schönen Beweis durchgeführt, den ich hier vorstellen möchte:

Aufgabe: Berechne die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion $f(x) = x^2$ und der x-Achse im Intervall [0 ; 2].

a) Näherungslösung mit 4 **Rechteckobersummen**.
Wir nähern uns der Fläche, indem wir die Gesamtfläche in 4 gleich breite Rechtecke aufteilen. Die Breite beträgt 2/4 also 0,5, die Höhe eines Rechtecks ergibt sich jeweils durch Einsetzen von 0,5; 1; 1,5 und 2. (Siehe Schaubild)



Wir erhalten folgende Flächensumme:

F1: $0{,}5^2 * 0{,}5 = 0{,}125$ **F2**: $1^2 * 0{,}5 = 0{,}5$
F3: $1{,}5^2 * 0{,}5 = 1{,}125$ **F4**: $2^2 * 0{,}5 = 2$

Summe 3,75

Das Ergebnis ist, wie im Schaubild ersichtlich, zu groß und kann dadurch verbessert werden, dass man die Zahl der Rechtecke erhöht. Wir können sogar auf das genaue Ergebnis der Fläche unter der Kurve kommen, wenn wir unendlich (n) viele Rechteckflächen berechnen. Dies zeigt die folgende Rechnung:

Es gibt n Rechtecke. Damit beträgt die Breite eines Rechtecks $\frac{2}{n}$, da das Gesamte eine Breite von 2 hat.

Die Höhe eines Rechecks ergibt sich aus dem Funktionswert an der Stelle $_i$ mit $\frac{2}{n}$ * n_i .

Diese beträgt $(\frac{2}{n}*1)^2$, oder $(\frac{2}{n}*2)^2$, oder$(\frac{2}{n}*3)^2$ bzw. $(\frac{2}{n}*n)^2$ für das letzte Rechteck.

Die Fläche beträgt somit: $(\frac{2}{n}*1)^2 * \frac{2}{n} + (\frac{2}{n}*2)^2 * \frac{2}{n} + (\frac{2}{n}*3)^2 * \frac{2}{n} + ... (\frac{2}{n}*n)^2 * \frac{2}{n}$

Wir können $\frac{2}{n}$ Ausklammern und erhalten

$\frac{2}{n}*((\frac{2}{n}*1)^2 + (\frac{2}{n}*2)^2 + (\frac{2}{n}*3)^2 + ... (\frac{2}{n}*n)^2)$

den Ausdruck $(\frac{2}{n}*n)^2$ können wir zerlegen in $(\frac{2}{n})^2 * n^2$

wir klammern wieder $(\frac{2}{n})^2$ aus und erhalten

$\left(\frac{2}{n}\right)^3 (1^2 + 2^2 + 3^2 + n^2)$

Für die Summe der ersten n Quadratzahlen gibt es folgende Formel:

$\boxed{\textbf{Summe} = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}$ (Die Formel wird hier nicht abgeleitet.)

z. B. $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$, da $\frac{1}{6}*4(4+1)(2*4+1) = 30$

Somit gilt:

$$\frac{8}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \frac{8}{6n^3}(2n^3+3n^2+n) = \frac{8}{6n^2}(2n^2+3n+1)$$

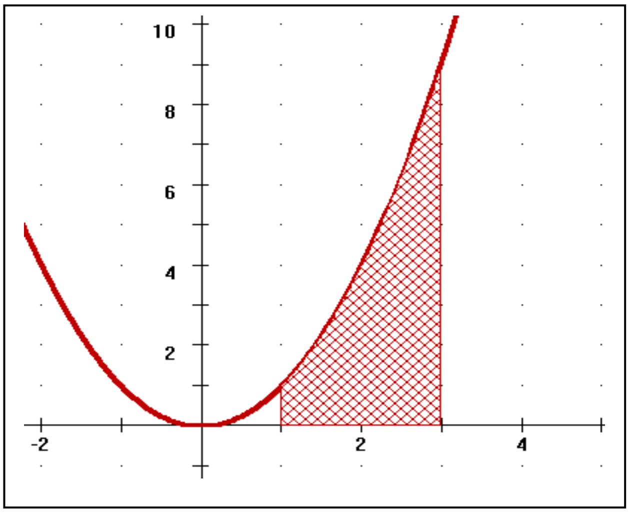
$$\frac{16n^2}{6n^2}+\frac{24n}{6n^2}+\frac{8}{6n^2}=\frac{8}{3}+\frac{4}{n}+\frac{4}{3n^2}$$ wenn n → ∞ , dann bleibt $\frac{8}{3} = 2{,}6666$

<u>Übungen</u>

a) Führen Sie diesen Nachweis für das Intervall [0;3]
b) Berechnen Sie die Fläche zwischen der Funktion $0{,}5x^2$ und der x-Achse als Grenzwert der Rechteckobersummen im Intervall [0;4]

4. Flächenberechnung durch Integration

4.1 Flächen oberhalb der x-Achse



Aufgabe: Berechne die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion $f(x) = x^2$ und der x-Achse im Intervall [1 ; 3].
Die Funktionsgleichung $f(x) = x^2$, die den krummlinigen Teil der Fläche begrenzt, bezeichnet man auch als **Randfunktion**.
Bei der Integralrechnung schreibt man diese Aufgabe ganz kurz so:

$\int_1^3 x^2 dx$ (sprich: Integral der Funktion x^2 zwischen x = 1 und x = 3)

allgemein: $\int_a^b f(x)dx$

Das Zeichen $\int$ ist das Integralzeichen und bedeutet so viel wie Fläche. Die linke Grenze des Intervalls steht unter dem Integralzeichen, die rechte Grenze steht darüber.

Man berechnet das Integral, indem man

- eine Stammfunktion F(x) der Funktion f(x) aufstellt,
- die Integrationsgrenzen a und b in F(x) einsetzt und
- die Differenz F(b) – F(a) bildet.

Das Integral ist die Umkehrung der 1. Ableitung. D.h. wir betrachten f(x) nun als die Ableitungsfunktion und suchen dazu eine Stammfunktion (auch Aufleitung). Die Stammfunktion, die den Flächeninhalt angibt, bezeichnet man auch als **Flächeninhaltsfunktion**.

Lösung: $\int_1^3 (x^2)dx \rightarrow \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^3 = \frac{1}{3}*27-\frac{1}{3}*1=9-\frac{1}{3}=8\frac{2}{3}$

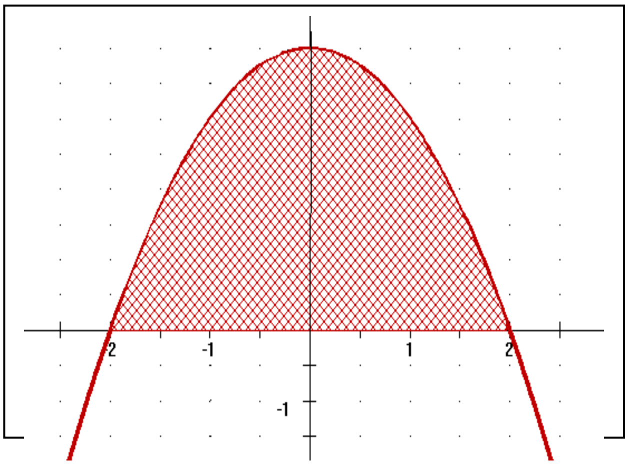
Die allgemeine Regel für die Aufleitung einer Potenz lautet:

$$f(x) = ax^n \rightarrow F(x) = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + C$$

wobei C die sog. **Integrationskonstante** ist, die bei der Berechnung von Integralen wegfallen kann, die sie sich durch die Differenzenbildung aufhebt.

4.2 Flächen links und rechts der y-Achse

<u>Aufgabe:</u> Berechne die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f(x) = $-x^2 + 4$ und der x-Achse im Intervall [-2 ; 2].



$$\int_{-2}^{2} (-x^2 + 4)dx$$

<u>Lösung:</u>

1. Stammfunktion aufstellen

$$\left[-\frac{1}{3}x^3 + 4x\right]_{-2}^{2}$$

2. Intervallgrenzen einsetzen und Differenz bilden

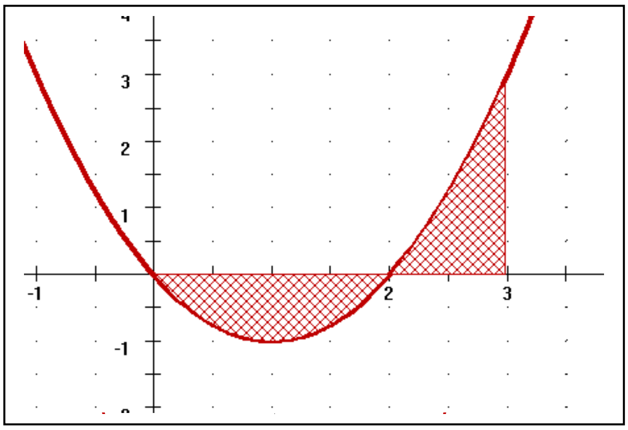
$$\left(-\frac{1}{3}\cdot 2^3 + 4\cdot 2\right) - \left(-\frac{1}{3}\cdot(-2)^3 + 4\cdot(-2)\right) = \left(-\frac{8}{3}+8\right) - \left(\frac{8}{3}-8\right) = \left(\frac{16}{3}\right) + \left(\frac{16}{3}\right) = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}$$

Zu beachten ist hier, dass die Fläche links der y-Achse negativ ist, die Fläche rechts der y-Achse positiv. Addiert man beide, wäre das Ergebnis in diesem Falle gleich 0, da beide Flächen gleich groß sind. Dadurch, dass aber immer die Flächendifferenz gebildet wird, wird die negative Fläche subtrahiert und somit addiert. Das führt zum richtigen Ergebnis.

Merke	Bei Teilflächen links und rechts der y-Achse werden einfach die Integrationsgrenzen eingesetzt und beide Teilflächen voneinander subtrahiert.

4.3 Flächen ober- und unterhalb der x-Achse

<u>Aufgabe:</u> $$\int_{0}^{3} (x^2 - 2x)dx$$



Die Zeichnung ergibt, dass es zwei Teilflächen gibt, eine oberhalb der x-Achse und eine unterhalb der x-Achse. Die beiden Teilflächen müssen getrennt berechnet werden und anschließend sind die Beträge zu addieren, da in diesem Falle die Teilfläche unterhalb der x-Achse einen negativen Wert ergeben würde.

Durch Anwendung der Betragsstriche | | werden diese Flächen positiv dargestellt.

Da die Teilflächen durch die Nullstellen des Graphen getrennt werden, sind zunächst die **Nullstellen** zu ermitteln.

$x^2 - 2x = 0$ → $x(x - 2) = 0$ → $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ (**x = 2** liegt im Intervall)

Die Aufgabenstellung lautet jetzt:

$\left|\int_0^2 (x^2 - 2x)dx\right|$ + $\left|\int_2^3 (x^2 - 2x)dx\right|$ Liegen mehrere Nullstellen im Intervall, so erhöht sich die Anzahl der Teilflächen entsprechend.

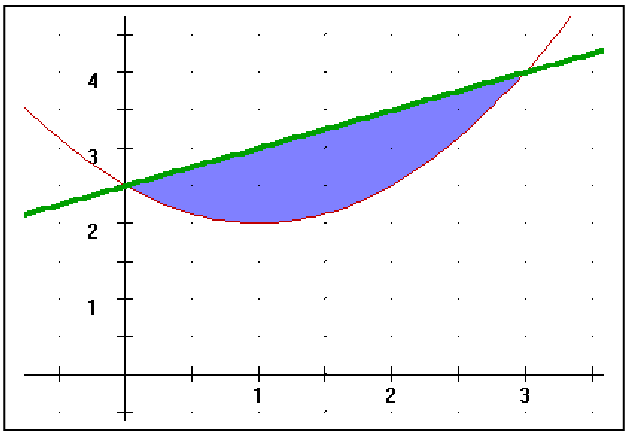
$\left|\left[\frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_0^2\right| + \left|\left[\frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_2^3\right|$ = | Intervallgrenzen einsetzen

$\left|(\frac{8}{3} - 4) - (0)\right| + \left|(9-9) - (\frac{8}{3} - 4)\right|$ = | Klammern ausrechnen und Beträge bilden

$\frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$ Ohne richtige Anwendung der Betragsstriche hätte sich eine Fläche von 0 ergeben!

4.4 Flächen zwischen zwei Funktionsgraphen

Aufgabe: Berechne die Fläche, die zwischen dem Graphen der Funktion f(x) = 0,5x² - x + 2,5 und der Funktion g(x) = 0,5x + 2,5 eingeschlossen wird.



Durch die Bestimmung der Schnittstellen der beiden Graphen erhält man die Integrationsgrenzen. Hierzu werden die Funktionsterme gleichgesetzt:

$0,5x^2 - x + 2,5 = 0,5x + 2,5$

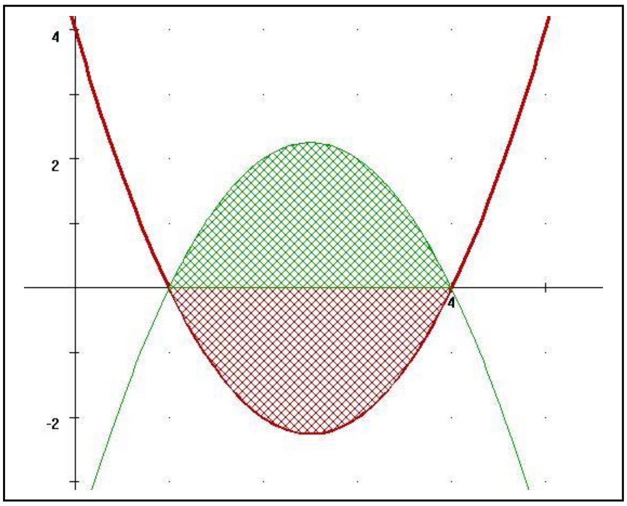
x_1 = 0 und **x_2 = 3**

Die eingeschlossene Fläche wird berechnet, indem man die **Differenzenfunktion** aus beiden Funktionen bildet. Dazu zieht man die Funktion g(x) von der Funktion f(x) ab (oder auch umgekehrt. Man erhält dann die Funktion $h(x) = 0,5x^2 - 1,5x$. Durch Setzen der Betragsstriche wird sichergestellt, dass die Fläche, die sich ergibt, immer positiv ist.

$$\left|\int_0^3 (0,5x^2 - 1,5x)dx\right| = \left|\left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{4}x^2\right]_0^3\right| = \left|\left(\frac{27}{6} - \frac{27}{4}\right) - 0\right| = \mathbf{2{,}25}$$

5. Bestimmen von Funktionsgleichungen bei gegebener Fläche

Aufgabe: Eine Parabel schneidet die x-Achse bei x = 1 und bei x = 4. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Parabel so, dass die von der Parabel und der x-Achse eingeschlossene Fläche den Wert 4,5 bekommt.



Lösung: Da die Nullstellen bekannt sind, kann die Funktionsgleichung so bestimmt werden, dass nur noch der Faktor a (Formfaktor) unbekannt ist.

f(x) = a(x - 1)(x - 4) auflösen

f(x) = ax² -5ax + 4a

Es soll gelten: $\left|\int_1^4 (ax^2 - 5ax + 4a)dx\right| = 4{,}5$ Stammfunktion bilden

$$\left|\left[\frac{a}{3}x^3 - \frac{5}{2}ax^2 + 4ax\right]_1^4\right| = 4{,}5$$ Grenzen einsetzen

$$\left|\left(\frac{64}{3}a - 40a + 16a\right) - \left(\frac{1}{3}a - \frac{5}{2}a + 4a\right)\right| = 4{,}5$$ Zusammenfassen

$$\left|\left(-\frac{8}{3}a\right) - \left(\frac{11}{6}a\right)\right| = 4{,}5$$ Zusammenfassen

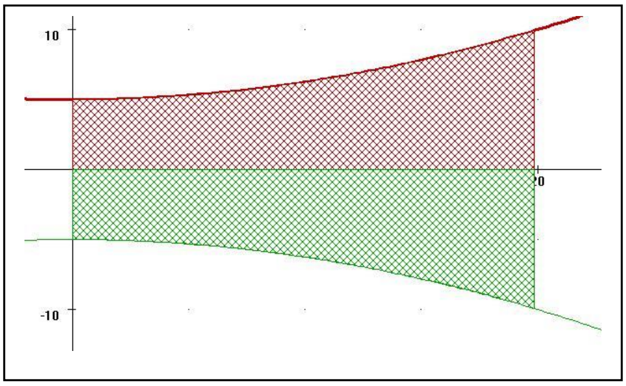
|-4,5a| = 4,5 → **a = 1** oder **a = - 1**

Die beiden Parabeln mit der Gleichung f(x) = x² - 5x + 4 und f(x) = -x² + 5x – 4 schließen mit der x-Achse eine Fläche von jeweils 4,5 ein.

6. **Drehkörpervolumen** (Rotationskörper)

Integralrechnung kann außer zur Flächenberechnung auch zur Volumenberechnung verwendet werden. Wenn man eine Seite einer Fläche als Achse verwendet und die Fläche um diese Achse rotieren lässt, so entsteht ein Rotationskörper, dessen Volumen wir berechnen können.

Aufgabe: Eine Vase hat einen Bodendurchmesser von 10 cm und einen Öffnungsdurchmesser von 20 cm. Die Vase ist 20 cm hoch. Die Ränder der Vase sind parabelförmig. Welches Volumen hat die Vase?



Lösungsweg: Wir kippen die Vase und legen sie so ins Koordinatenkreuz, dass die x-Achse genau durch die Mitte geht und der Boden von der y-Achse begrenzt wird.
Nun berechnen wir die Funktionsgleichung der Parabel für den oberen oder unteren Rand der Vase. Dies ist eine Parabel der Form $f(x) = ax^2 + b$

Durch Einsetzen von b = 5 und dem Punkt (20/10) ergibt sich:
$10 = 400a + 5$ und $a = 0{,}0125$ → $\mathbf{f(x) = 0{,}0125x^2 + 5}$
Die Formel für die Berechnung eines Drehkörpervolumens lautet:

$$\boxed{V = \pi \int_a^b [(f(x))]^2 dx}$$

Wir setzen ein

$$V = \pi \int_0^{20} [(0{,}0125x^2 + 5)]^2 dx$$

Quadrieren (1. Bin. Formel)

$$V = \pi \int_0^{20} (0{,}00015625x^4 + 0{,}125x^2 + 25) dx$$

Integral bilden

$$V = \pi [0{,}00003125x^5 + 0{,}041666x^3 + 25x]_0^{20}$$ Grenzen einsetzen

$$V = \pi(100 + 333{,}33 + 500) - 0 = 2932{,}14 \text{ cm}^3$$

Das entspricht einer Menge von knapp **3 Litern**.

7. Aufgabenteil

Zu Kapitel 2:

a) Berechne die Fläche zwischen dem Graphen von f(x) = 1,5x und der x-Achse im Bereich [0, 5].
b) Berechne die Fläche zwischen dem Graphen von f(x) = -0,4x + 5 und der x-Achse im Bereich [0, 8].

c) Berechne die Fläche zwischen dem Graphen von f(x) = -1,5x + 5 und der x-Achse im Bereich [0, 6].

d) Berechne die Fläche zwischen den beiden Graphen f(x) = x – 2 und g(x) = 0,4x + 1 im Bereich [5, 10].

Zu Kapitel 3:

e) Berechne die Fläche zwischen dem Graphen von f(x) = 0,5x² + 2 im Bereich [0, 4] durch Annäherung mit Hilfe von zwei und vier Trapezen.

f) Berechne die Fläche zwischen dem Graphen von f(x) = x³ -2x²+ 3 im Bereich [0, 2] durch Annäherung mit Hilfe von zwei und vier Trapezen.

Zu Kapitel 4:

g) Bestimme die Stammfunktion (Flächeninhaltsfunktion) zu folgenden Randfunktionen

1) $f(x) = -0{,}5x + 2$ 2) $f(x) = 0{,}25x^3$ 3) $f(x) = 0{,}5x^4 + 2x^2 - 2$

4) $f(x) = 0{,}5x^2 + x$ 5) $f(x) = 0{,}1x^3$ 6) $f(x) = 1{,}5x^3 - 3x^2 + 1$

zu 4.1

Berechne folgende Integrale

h) $\int_1^3 (0{,}5x)dx$ i) $\int_2^5 (0{,}5x^2 + 1)dx$ j) $\int_0^2 (0{,}5x^3 - x^2 + 2)dx$

zu 4.2 und 4.3

k) $\int_0^4 (-0{,}4x^2 + 2{,}8x - 2{,}4)dx$ l) $\int_{-2}^2 (x^2 - 3)dx$

m) $\int_{-2}^2 (0{,}25x^4 - 1{,}25x^2)dx$ ma) $\int_{-5}^0 (-x^2 - 5x - 4)dx$

mb) $\int_{-1}^3 (x^3 - 2x)dx$ mc) $\int_1^4 (-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x)dx$

zu 4.4

Berechne die Fläche zwischen dem Graphen f(x) und dem Graphen g(x)

na) $f(x) = -x^2 - 1$ und $g(x) = -2$ nb) $f(x) = 0{,}5x^2 - x + 2{,}5$ und $g(x) = 0{,}5x + 2{,}5$

o) $f(x) = x^3 - x$ und $g(x) = 3x$

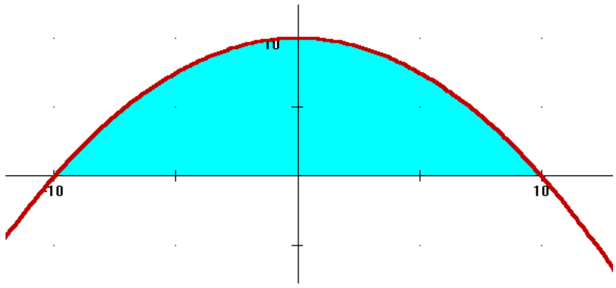
zu 5.

p) Eine Parabel schneidet die x-Achse bei 2 und 5. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Parabel so, dass die von der Parabel und der x-Achse eingeschlossene Fläche den Wert 2,25 hat.

Vermischte Aufgaben

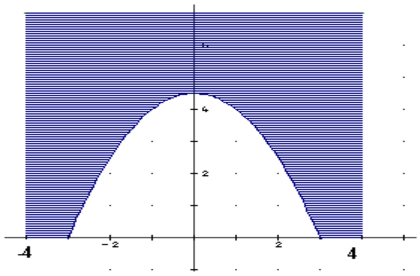
q)

Berechne die dargestellte Fläche, wenn die Kurve eine Parabel mit der Scheitelhöhe 10 ist.



r)

Ein Eisenbahntunnel hat eine parabelförmige Durchfahrt mit einer Breite von 6 m. Der Scheitelpunkt der Parabel liegt bei (0/4,5). Wie viel m³ Beton wird benötigt, wenn der Tunnel eine Höhe von 7 m hat und eine äußere Breite von 8 m und er eine Länge von 50 m hat?



s)
Die Randfunktion eines Kegels lautet f(x) = x. Die Höhe des Kegels beträgt 5 cm.

1. Berechnen Sie das Volumen des Kegels.
2. Leiten Sie mit der Volumenformel für Rotationskörper die allgemeine Volumenformel für den Kreiskegel ab. $V = \frac{\pi}{3} r^2 h$.

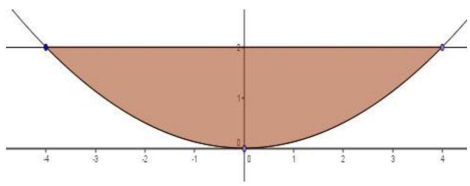
t)

Welches Volumen hat ein Sektglas mit der Randfunktion f(x) = $\frac{1}{32}x^2$ und einer Höhe von 8cm?

u)
Welchen Inhalt fasst eine 0,80 m hohe bauchige Regentonne mit einem Bodendurchmesser von 0,70 m und einem Mitteldurchmesser von 1 m?

v)
Die Differentialkostenfunktion (Grenzkosten)eines Betriebes lauten K'(x) = 3x² – 20x + 40.
Die Gesamtkosten bei einer Produktion von 4 ME betragen 200.
Bestimmen Sie aus diesen Angaben die Funktionsgleichung der Gesamtkosten.

w)
Ein Kanal hat die dargestellte parabelförmige Form mit einer Gesamtbreite von 8 m und einer Länge von 2 km.
a) Wie viel Wasser fasst der Kanal, wenn er voll Wasser ist (max. 2 m)?
b) Wie hoch steht das Wasser, wenn die Wassermenge im Kanal nur halb so groß ist?



Exponentialfunktionen

Exponentialfunktionen beschreiben wichtige Wachstums- und Abnahmeprozesse in der Ökonomie, in der Natur und in der Technik.
Ein exponentieller Verlauf liegt vor, wenn der Bestand zum Zeitpunkt x jeweils mit demselben Faktor multipliziert wird.

1. Die Exponentialfunktion der Form $f(x) = a \cdot b^x$

Allgemein: $\boxed{f(x) = a \cdot b^x}$ wobei **a** = f (0), d. h. der **Anfangswert** zum Zeitpunkt 0 und **b** der **Wachstums- oder Zerfallsfaktor** ist.

Es gilt: Wenn b > 1 → **Wachstumsfunktion**, wenn b<1 → **Zerfallsfunktion**

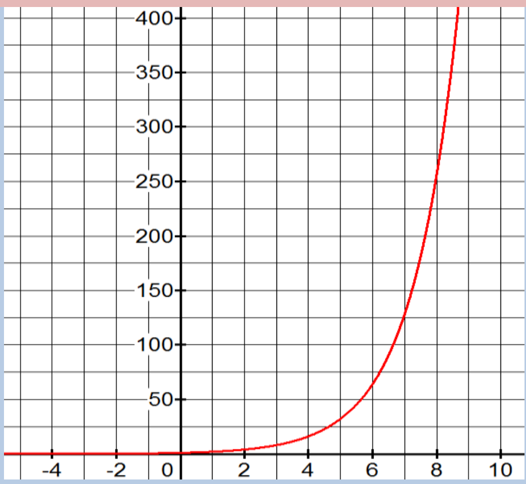
Anwendungsgebiete:
Exponentielle Wachstums- und Zerfallsvorgänge finden sich sehr häufig in der Biologie (Zellwachstum), Chemie (Zerfall von Radioaktivität), Wirtschaft (Verzinsung von Kapital) und vielen anderen Wissenschaften.

Das Wesen der Exponentialfunktionen:
Exponentielle Wachstumsvorgänge entwickeln eine Dynamik, wie sie durch keine anderen mathematischen Modelle beschrieben werden. Bereits kleine Anfangswerte entwickeln sich oft schon nach wenigen Perioden explosionsartig. Handelt es sich dabei um Vorgänge in Natur und Umwelt, so ist es wichtig, diese rechtzeitig zu erkennen, um eventuell geeignete Maßnahmen ergreifen zu können.

2. Wachstum und Zerfall

Schaubild 1: Exponentielles Wachstum

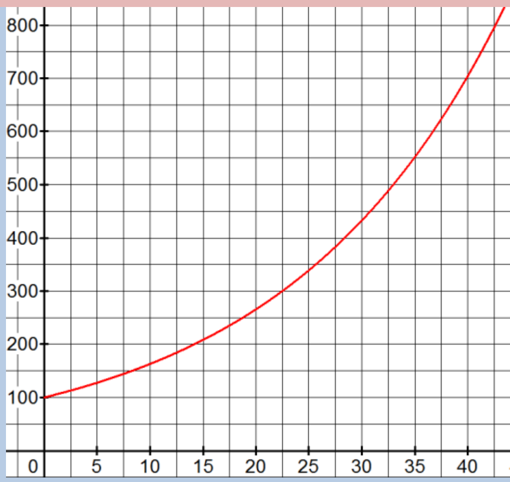
$f(x) = 2^x$



Der obige Graph beschreibt die Entwicklung der Potenzen der Zahl 2. Man erkennt am Verlauf des Graphen die Dynamik, die sich schon nach wenigen Perioden entwickelt. Die Millionengrenze ist bereits für x = 20 überschritten.

Schaubild 2: Exponentielles Wachstum

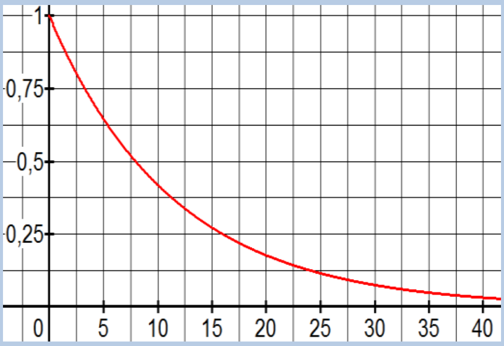
$f(x) = 100 \cdot 1{,}05^x$



Der obige Graph beschreibt die Entwicklung eines Kapitals von 100 €, welches mit 5 % pro Jahr verzinst wird.
Würde man die Entwicklung des Kapitals über 500 Jahre verfolgen, so würde man einen Endwert von ca. 4 Billionen € erreicht haben.

Schaubild 3: Exponentieller Zerfall

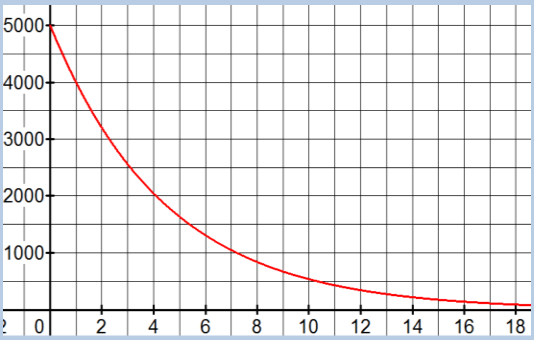
$f(x) = 0.917^x$



Der obige Graph beschreibt den Zerfall eines radioaktiven Elementes mit einer Halbwertzeit von 8 Tagen.

Schaubild 4: Exponentieller Zerfall

$f(x) = 5000 \cdot 0{,}8^x$



Der obige Graph beschreibt die Wertentwicklung eines Gegenstandes mit einem Anschaffungswert von 5000 €, der mit 20 % pro Jahr abgeschrieben wird.

Exponentialfunktionen

Unterschied zum potenziellen Wachstum: Beim potenziellen Wachstum wird der aktuelle x-Wert potenziert, beim exponentiellen Wachstum wird der vorhergehende Funktionswert mit einer Zahl multipliziert, um den aktuellen Funktionswert zu erhalten.

Potenzielles Wachstum		**Exponentielles Wachstum**	
Beispiel: $f(x) = x^2$		Beispiel: $f(x) = 2^x$	
x = 1	f(x) = 1	x = 1	f(x) = 2
x = 2	f(x) = 4	x = 2	f(x) = 4
x = 3	f(x) = 9	x = 3	f(x) = 8
x = 5	f(x) = 25	x = 5	f(x) = 32
x = 10	f(x) = 100	x = 10	f(x) = 1024
x = 20	f(x) = 400	x = 20	f(x) = 1048576

Man sieht, wie dynamisch sich die Exponentialfunktion im Vergleich zur Potenzfunktion entwickelt.

2.1 Berechnen der einzelnen Größen der einfachen Exponentialfunktion

Berechnen des Funktionswertes Ein Kapital von 1000 € wird mit 3 % verzinst. Auf welchen Betrag ist es nach 5 Jahren angewachsen?	a = 1000, b = 1,05, x = 5, f(x) = ? $1000 \cdot 1{,}03^5 = f(x)$ f(x) = 1159,27
Berechnen des Anfangswertes Nach drei Jahren wurde ein Kredit einschließlich 5 % Zinsen mit 8682,19 € zurückgezahlt. Wie hoch war der Kredit?	a = ?, b = 1,05, x = 3, f(x)=8682,19 $a \cdot 1{,}05^3 = 8682{,}19$ $\mid :1{,}05^3$ a= 7500 €
Berechnen des Wachstumsfaktors Eine Flüssigkeit kühlt sich innerhalb von 30 Minuten von 90 Grad auf 25 Grad ab. Berechne die Zerfallsrate pro Minute.	a = 90, b = ?, x = 30, f(x)=25 $90 \cdot b^{30} = 30$ $\mid \sqrt[30]{0.333}$ b = 0,964 → 3,6 % pro Minute
Berechnen der Zeit Wie lange war ein Kredit über 3000 €, der mit 4,75% verzinst wurde, geliehen, wenn er mit 4348,64 € zurückgezahlt wurde?	a = 3000, b = 1,0475, x = ?, f(x)=4348,64 $3000 \cdot 1{,}0475^x = 4348{,}64$ $\mid : 3000$ $1{,}0475^x = 1{,}4495$ $\mid \log$ $x \cdot \log 1{,}0475 = \log 1{,}4495$ $\mid : \log 1{,}0475$ x= 8 Jahre

3.1 Natürliches Wachstum

Wachstums- und Zerfallsprozesse, die in der Natur vorkommen unterscheiden sich in der Regel von unseren bisherigen Beispielen dadurch, dass der Wachstums- oder Zerfallsvorgang nicht zu einem bestimmten Zeitpunkt (z. B. am Jahresende) stattfindet, sondern der Prozess findet kontinuierlich statt.
Ein Sparguthaben wird nur jeweils zu einem bestimmten Zeitpunkt verzinst (Jahresende), der radioaktive Zerfall eines Elementes findet aber ständig (kontinuierlich) statt.
Solche Prozesse, die ständig stattfinden, werden als **natürliche** Wachstums- oder Zerfallsprozesse bezeichnet.
Welcher rechnerische Unterschied besteht zwischen exponentiellen Vorgängen, die sich periodisch verändern und solchen die sich natürlich entwickeln?
Ein Beispiel soll dies verdeutlichen:

Beispiel: Drei Banken haben drei verschiedene Angebote:

Bank A: Legen Sie 1000 € zu 4 % Zinsen für ein Jahr an.
Bank B: Legen Sie 1000 € zu 2 % Zinsen für ein Jahr bei halbjährlicher Verzinsung an.
Bank C: Legen Sie 1000 € zu 1 % Zinsen für ein Jahr bei vierteljährlicher Verzinsung an.

Es ist klar, dass Bank C das günstigste Angebot hat, da der Betrag ja viermal verzinst wird, wobei die Zinsen jedes Mal wieder mit verzinst werden.
Wir erhalten nach einem Jahr:

Bank A: 1040,00 €, Bank B: 1040,40 €, Bank C: 1040,60 €

Wenn wir die Zahl der Verzinsungen pro Jahr immer weiter steigern und den Jahreszinssatz jeweils durch die Anzahl der Verzinsungen dividieren, wird das Endkapital nach einem Jahr immer weiter anwachsen. Die Frage ist, ob das Kapital bei fortgesetzter Anzahl der Verzinsungen auch immer weiter steigt, im Extremfall bis ins Unendliche.

3.2 Die e-Funktion (Eulersche Funktion)

Mit dieser Frage hat sich der berühmte Mathematiker **Leonhard Euler** beschäftigt.
Er zeigte, dass, wenn man einen Betrag von 1 zu 100% beliebig oft pro Jahr verzinst, das Ergebnis sich einem Grenzwert nähert. Dieser Grenzwert ist eine irrationale Zahl und wird als die **Eulersche Zahl e** bezeichnet. Der Grenzwert liegt bei **2,71828**...
Mit dieser Zahl lassen sich kontinuierliche Wachstums- und Zerfallsprozesse, wie sie in der Natur vorkommen beschreiben. Die Funktion **f(x) = e^x** bezeichnet man auch als **natürliche Exponentialfunktion**. Natürliche Wachstums- und Zerfallsprozesse können mit der Gleichung $f(t) = a \cdot e^{i \cdot t}$ beschrieben werden.
(a = Anfangswert, i = Wachstums- oder Zerfallskonstante, t = Zeiteinheit)

Verfolgen wir das Beispiel von oben weiter, so ergibt sich für eine Bank D, die das Kapital kontinuierlich verzinsen würde, folgende Rechnung:

$f(t) = 1000 \cdot e^{0{,}04 \cdot 1}$, wobei i = 0,04 (4 %) und t = 1 (ein Jahr) ist.
Das Ergebnis beträgt 1040,81 €.

Das heißt, dass die Berücksichtigung des natürlichen Wachstumsvorgangs das Ergebnis ein wenig größer macht. Bei einem niedrigen Zinssatz ist der Unterschied aber im Vergleich zum periodischen Wachstum nicht sehr groß.

<u>Beispiel 5</u>: Die Bevölkerung eines Landes beträgt 12 Millionen und wächst mit einer Wachstumsrate von 2,5 % jährlich. Wie groß ist die Bevölkerung nach 10 Jahren?
a) Wenn wir auf die' herkömmliche' Art rechnen und (unsinniger Weise) davon ausgehen, dass die Bevölkerung nur immer am Jahresende wächst, ergibt sich $12 \cdot 1{,}025^{10} = 15{,}36$ Millionen.
b) Rechnen wir mit der natürlichen Exponentialfunktion so wird korrekter Weise davon ausgegangen, dass der Wachstumsprozess kontinuierlich erfolgt. Es ergibt sich dann folgende Rechnung: $12 \cdot e^{(0{,}025*10)}$ =15,41 Millionen. Allgemein $f(t) = a \cdot e^{i \cdot t}$ (wobei i hier 0,025 und t = 10 ist).

Durch Umstellen der Funktionsgleichung einer Exponentialfunktion können alle Größen berechnet werden. Wenn wir x berechnen wollen, muss mit **Logarithmen** gerechnet werden (siehe oben).

3.3 Umgang mit der e-Funktion (Verschiedene Beispiele)

<u>Beispiel 1:</u>
Das Bevölkerungswachstum eines Landes ergibt sich aus folgender Tabelle:

Jahr	2000	2004	2008	2012
Mio	15,0	16,62	18,42	20,41

Wie heißt die Funktionsgleichung, wenn man von exponentiellem Wachstum ausgeht?

Lösung:
a) mit der einfachen Exponentialfunktion

$15 \cdot b^{12} = 20{,}41$ → b = 1,026

$f(x) = 15 \cdot 1{,}026^x$
(jährliches Wachstum von 2,6 %)

b) mit der e-Funktion
$15 \cdot e^{i \cdot 12} = 20{,}41$ | : 15
$e^{i \cdot 12} = 1{,}3606$ | ln
i·12=ln(1,3606) | : 12
i = 0,02566
$$f(t) = 15 \cdot e^{0{,}02566 \cdot t}$$

<u>Beispiel 2:</u>
Das radioaktive Isotop Jod 131 zerfällt mit der Zerfallskonstante i = -0,0866 pro Tag.
Wie viel der Ausgangsmenge von 100 mg ist nach 14 Tagen noch vorhanden?

Lösung:
$$100 \cdot e^{-0{,}0866 \cdot 14} = 29{,}75 mg$$

<u>Beispiel 3:</u>
Ein radioaktives Isotop hat eine Halbwertzeit von 13 Jahren. Wie lange dauert es, bis nur noch 1 % der Strahlung vorhanden ist?

Die Aufgabe kann auf zwei Arten gelöst werden.
a) Über die Berechnung der Zerfallskonstanten

b) Mit dem Zerfallsfaktor 0,5 und der einfachen Exponentialfunktion

Diese Rechnung funktioniert mit der e-Funktion so nicht, da hier der Einfluss des stetigen Wachstums nicht berücksichtigt wird.

Lösung:
$100 \cdot e^{i \cdot 13} = 50$ → i = -0,0533

$100 \cdot e^{-0{,}0533 \cdot t} = 1$ | ln
-0,0533·t=ln(0,01) → **t = 86,4 Jahre**

$100 \cdot 0{,}5^x = 1$

x = 6,6438 (Einheiten à 13 Jahre)
t = 6,6438 ·13 = **86,4 Jahre**

<u>Beispiel 4:</u>
Berechnen der Wachstumskonstanten i und des Wachstumsfaktors b

Ein Kapital von 3000 € ist nach 2 Jahren auf 3244,80 € angewachsen. Wie groß ist der Faktor i und mit wieviel Prozent wurde verzinst.

Lösung:
Zunächst mit der e-Funktion

$3000 \cdot e^{i \cdot 2} = 3244{,}80$
$e^{i \cdot 2} = 1{,}0816$ | ln
$i \cdot 2 = 0{,}0784414$
$i = 0{,}0392207$

der Faktor b der einfachen Exponentialfunktion ergibt sich aus: **i = ln(b)**
d.h. $b = e^i = 1{,}04$ **p = 4 %**

Aufgaben

1. Eine Nährlösung enthält zu Beginn der Beobachtung 5000 Bakterien. Stündlich vermehrt sich die Anzahl der Bakterien um 15 %.
   a) Geben Sie die dazu gehörige Wachstumsfunktion an.
   b) Berechnen Sie die Anzahl der Bakterien nach 6 (bzw. 36) Stunden an.

2. Berechnen Sie die fehlenden Größen der folgenden Zinseszinsaufgaben

Aufgabe	Ko	p	n	Kn
a)	3450,00	3,375	7	
b)		6	12	11 067,08
c)	220 000,00		9	334 048,07
d)	75 000,00	8,3		121 012,99

3. Das radioaktive Isotop Polonium zerfällt nach folgender Messreihe:

t (Jahre)	0	5	10	15	20	25	30
mg	100	97,5	95,1	92,5	90,4	88,1	85,9

a) Bestimmen Sie die Exponentialfunktion.
b) Berechnen Sie die Halbwertzeit des Elements (d.h., die Zeit, nach der das Element auf die Hälfte zerfallen ist
c) Wie lange dauert es, bis nur noch 10 % der Anfangsmenge vorhanden sind?

4. Der radioaktive Kohlenstoff C-14 zerfällt mit einer Halbwertzeit von 5730 Jahren. Jeder lebende Organismus nimmt Kohlenstoff auf. Stirbt der Organismus zerfällt der Kohlenstoff. Anhand des noch vorhandenen Kohlenstoffs kann das Alter eines abgestorbenen Organismus bestimmt werden. Diese sog. C14-Methode kann bei Organismen bis zu einem Alter von ca. 25 000 Jahren zuverlässig angewendet werden.

a) Bei Ausgrabungen wird eine mumifizierte Leiche entdeckt, deren Kohlenstoffanteil noch 68 % beträgt. Wie alt ist die Mumie.

b) Bei Ausgrabungen werden Fossilien von 20 000 Jahre alten Pflanzen gefunden. Wie viel Prozent Kohlenstoff enthalten diese noch?

5. Der Luftdruck p in der Atmosphäre nimmt mit zunehmender Höhe stetig um ca. 11,75 % pro 1000 m ab. Der Luftdruck in Meereshöhe beträgt 1000 mbar. Wie hoch ist der Luftdruck in 5000 bzw. 10 000 m Höhe?

6. 1982 lebten in Nigeria 54 Mio. Menschen. Im Jahr 2000 waren es ca. 125 Mio. Menschen. Es wird angenommen, dass die Einwohnerzahl seit 1982 exponentiell zunimmt.

a) Um wie viel Prozent wächst die Bevölkerung pro Jahr?
b) Wie viele Menschen würden dann in Nigeria im Jahre 2020 leben?
c) Wann wird sich die Bevölkerungszahl von 2000 verfünffacht haben?

7. Ein Computer-Virus vermehrt sich exponentiell nach der Formel
f(t) = $4498 \cdot e^{0,2391 t}$ (t in Stunden).
Wie viele Computer sind nach 24 Stunden infiziert?

8. Der oben (Aufgabe 6) dargestellten C-14 – Methode liegt ein natürlicher Zerfallsprozess zugrunde. Solche Wachstums- oder Zerfallsprozesse werden in der Wissenschaft durch eine e-Funktion in der Form f(t) = $a \cdot e^{k \cdot t}$ dargestellt. Bei einem Zerfallsprozess (wie bei der C-14 Methode) ist die Zerfallskonstante k negativ.
Berechnen Sie für die C-14 Methode die Zerfallskonstante und bestimmen Sie die Funktionsgleichung der e-Funktion.

Beschreibende Statistik

1. Daten

Aufgabe der Statistik ist die zahlenmäßige Erfassung und Aufbereitung von **Daten** und die Auswertung von Datenmaterial. Ausgewertet werden dabei bestimmte **Merkmale** aus einer **Grundgesamtheit** oder einer **Stichprobe** von Daten.
Merkmale können qualitativer oder quantitativer Art sein.

Begriff	Erläuterung
Daten	Informationen über die Merkmalsträger
Merkmal	Eigenschaften der Merkmalsträger, z.B. Haarfarbe, Körpergröße, Alter
Grundgesamtheit	Alle Merkmalsträger, z.B. alle Schüler einer Schule
Stichprobe	Eine repräsentative Auswahl aus der Grundgesamtheit
qualitative Merkmale	Geschlecht, Haarfarbe, Familienstand, Beruf
quantitative Merkmale	Alter, Körpergröße, Einkommen

2. Datenerhebung

Ziel der Datenerhebung oder Datengewinnung ist das Sammeln möglichst vollständiger, vollzähliger und nachvollziehbarer Daten. Zu den Methoden der Datenerhebung zählen unter anderen das **Interview**, der **Fragebogen**, die **Beobachtung** sowie das **Experiment**.

3. Darstellung von Daten

Wie kann man deskriptive Daten darstellen? Man kann

- sie **tabellarisch auflisten**
- sie **graphisch darstellen** und

- **ihre Kenngrößen berechnen.**

Bei der graphischen Darstellung gibt es **unterschiedliche Diagrammtypen**.

Man unterscheidet zum Beispiel

- **Linien**diagramme
- **Balken**diagramme
- **Säulen**diagramme
- **Histogramme**
- **Kreis**diagramme
- **3D-Kreis**diagramme
- **Flächen**diagramme

4. Auswertung

Folgende **Kenngrößen** sind für uns von Interesse:

- **Mittelwert - das arithmetische Mittel oder der *Durchschnitt***
- **Modus oder Modalwert - der häufigste Wert in einer Liste**
- **Median - der mittlere Wert in einer geordneten Liste**
- **Spannweite oder Variationsbreite - die Differenz zwischen größtem und kleinstem Wert einer Datenreihe**
- **Streumaße**

5. Beispiel einer statistischen Untersuchung (fiktives Beispiel)

Anhand eines fiktiven Beispiels soll die Arbeitsweise in der beschreibenden Statistik dargestellt werden.

Es soll folgende Behauptung geprüft werden:

Die Schüler in deutschen Schulen werden immer dicker.

Da wir nicht die Daten aller Schüler vorliegen haben, müssen wir uns bei der Überprüfung dieser Behauptung (Hypothese) mit einer Stichprobe begnügen. Außerdem ist zu klären, woran wir messen wollen, wann ein Schüler zu dick oder zu dünn ist. Das Gewicht allein sagt wenig aus, da das Alter und die Körpergröße ebenfalls eine Rolle spielt. Als brauchbares und weit verbreitetes Maß hat sich der **Body-Maß-Index (BMI)** erweisen, der Gewicht und Körpergröße zu einem Maß zusammenfasst.

a) **Stichprobe**: Zunächst mal beschränken wir uns auf die Schüler im Schulamtsbezirk Gießen. Um Vergleichbarkeit herzustellen, müssen alle Schüler im selben Alter sein. Wir untersuchen Schüler im Alter von 16 Jahren. Jede Schule hat eine Schulnummer: Nach dem Zufallsprinzip wählen wir 5 Schulen aus.
b) **Datenerhebung**: In diesen Schulen **befragen** wir alle Schüler im Alter von 16 Jahren, deren Nachname mit einem bestimmten Anfangsbuchstaben beginnt. Dieses wiederholen wir im Zeitablauf von drei Jahren. Wir beschränken uns zunächst auf männliche Schüler.

c) **Merkmal:** Untersuchtes Merkmal ist die Körpergröße und das Gewicht des Schülers. Daraus errechnen wir den BMI nach folgender Formel:

$$BMI = \frac{Gewichti(kg)}{Körpergröße(m)^2}$$

Beispiel: Gewicht 70 kg, Körpergröße 1,78 m

$$BMI = \frac{70}{1{,}78^2} = 22{,}1$$

d) Merkmalsausprägung: Der BMI eines Normalgewichtigen liegt zwischen 20 und 25. Üblicherweise wird der BMI in Kategorien eingeteilt. Wir wählen folgende Kategorien:

unter 20	**Untergewicht**
20 bis unter 25	**Normalgewicht**
25 bis unter 30	**Übergewicht**
ab 30	**starkes Übergewicht**

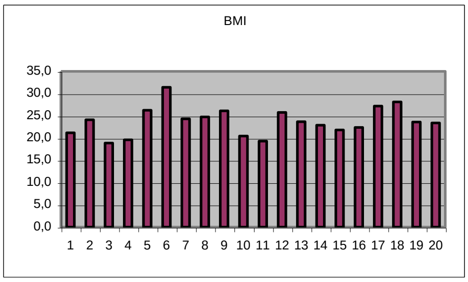
e) Darstellung der Daten: Die Daten werden in einer **Tabelle** erfasst. Der Vergleich der Daten von drei Jahren ergibt folgende Übersicht:

Schüler-Nr	BMI 2013	BMI 2012	BMI 2011
1	21,2	26,3	23,7
2	23,8	30,3	22,9
3	18,9	24,3	21,8
4	19,6	25,2	22,4
5	26,8	26,1	27,2
6	31,4	20,5	21,2
7	25,1	20,9	24,1
8	25,5	25,8	19,3
9	26,5	23,7	20,1
10	20,5	22,9	23,8
11	19,3	21,8	24,3
12	25,8	24,1	22,0
13	23,7	21,3	21,5
14	22,4	20,1	27,3
15	21,4	23,8	29,4
16	22,4	24,3	23,1
17	27,2	22,0	22,2
18	28,1	21,5	18,8
19	23,6	27,6	21,5
20	23,4	25,7	22,2

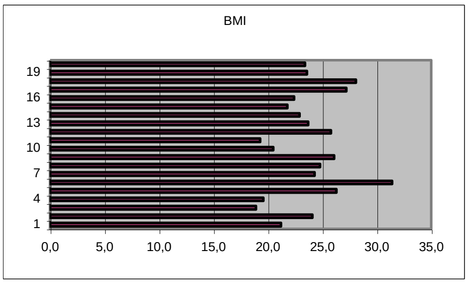
Beschreibende Statistik

Verschiedene Darstellungen der Daten als Schaubild (**Diagramm**) für die Auswertung von 2013

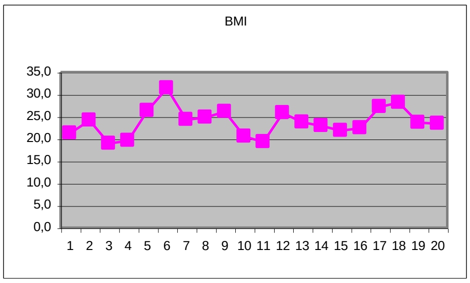
1) Säulendiagramm



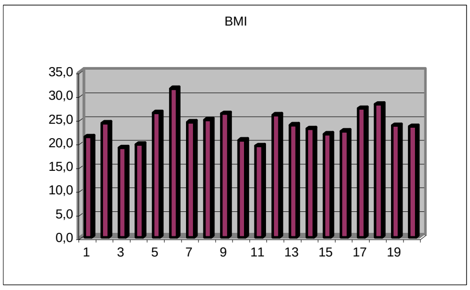
2) Balkendiagramm



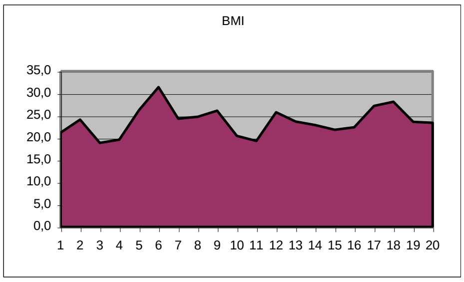
3) Liniendiagramm



4) Säulendiagramm in 3 D-Ansicht

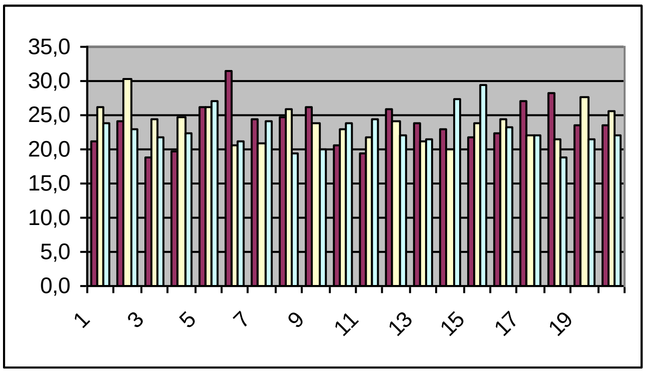


5) Flächendiagramm



Ja nach Art, Umfang und Merkmals-ausprägung der Daten eignen sich bestimmte Diagrammarten gut oder weniger gut.
Ein Kreisdiagramm z.B. macht in dieser Datenreihe keinen Sinn.
Das Säulendiagramm wirkt für unseren Zweck am anschaulichsten.

6) Der Vergleich aller drei Datenreihen im Säulendiagramm wirkt allerdings zunächst noch sehr unübersichtlich.



f) **Mittelwerte**
Zur Beurteilung der Hypothese, ob es tatsächlich zu einer bemerkenswerten Veränderung in der Entwicklung des BMI gegeben hat, eignen sich die Diagrammdarstellungen im Moment noch nicht. Genaueren Aufschluss geben uns statistische Kennzahlen, wie z. B. Mittelwerte.

Mittelwert: Der bekannteste Mittelwert ist das **arithmetische Mittel**, das sich nach folgender Formel berechnet:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$$

n : Anzahl der Beobachtungswerte x_i x_i : i - ter Beobachtungswert $i \in \mathbb{N}$

Das **arithmetische Mittel** wird bezeichnet mit $\bar{x}$ (lies: x quer)
Das Zeichen $\sum$ ist das Summenzeichen, mit dem einzelne Merkmalswerte aufaddiert werden.
Mit Worten: Das arithmetische Mittel ergibt sich durch Addition aller Merkmalswerte dividiert durch die Anzahl der Werte. Es ergibt sich:

Jahr **(T2)**	2013	2012	2011
Arithmetisches Mittel des BMI	**23,8**		

Wir stellen zwar einen leichten Anstieg des BMI seit 2011 fest, dennoch wäre die Aussage, dass der BMI bemerkenswert (signifikant) gestiegen ist, wohl noch zu gewagt, zumal im Jahr 2013 im Vergleich zum Vorjahr ein leichter Rückgang vorliegt. Um eine generelle Aussage abzuleiten, ist unsere Stichprobe zu klein.

Für gruppierte Daten, die in Klassen zusammengefasst sind, bietet sich das **gewogene arithmetische Mittel** als Kenngröße an.
Dabei wird von jeder Klasse der Mittelwert gebildet und mit der Klassenhäufigkeit multipliziert. Die Summe wird anschließend durch die Gesamtzahl dividiert.
Beispiel:
Bei einer Veranstaltung werden die Besucher nach ihrem Alter erfasst und in Klassen eingeteilt:

Alter **(T3)**	Anzahl	Klassenmitte	Summe
10 – 20	12	15	180
20 – 30	25	25	625
30 – 40	42	35	1470
40 – 50	26	45	1170
50 - 60	10	55	550
Summen	115		3995

Als gewogenes arithmetisches Mittel ergibt sich ein Durchschnittsalter von **34,7** Jahren.

Für weitere Mittelwerte werden die Werte der Tabelle der Größe nach sortiert (**T4**):

Schüler-Nr	BMI 2013	BMI 2012	BMI 2011
1	18,9	20,1	18,8
2	19,3	20,5	19,3
3	19,6	20,9	20,1
4	20,5	21,3	21,2
5	21,2	21,5	21,5
6	21,4	21,8	21,5
7	22,4	22,0	21,8
8	22,4	22,9	22,0
9	23,4	23,7	22,2
10	23,6	23,8	22,2
11	23,7	24,1	22,4
12	23,8	24,3	22,9
13	25,1	24,3	23,1
14	25,5	25,2	23,7
15	25,8	25,7	23,8
16	26,5	25,8	24,1
17	26,8	26,1	24,3
18	27,2	26,3	27,2
19	28,1	27,6	27,3
20	31,4	30,3	29,4

Der Modalwert: Der Modalwert ist der Merkmalswert, der am häufigsten vorkommt. Die Bestimmung des Modalwertes macht in unserer Datensammlung keinen Sinn, da fast jede Merkmalsausprägung nur einmal vorkommt. Anders wäre es, wenn wir die Daten gruppieren, wie dies später der Fall sein wird.

Der Median: Der Median ist der Wert, der in der Mitte steht, wenn alle Werte der Größe nach geordnet sind. D.h. höchstens 50 % der Werte befinden sich links vom Median, höchstens 50 % der Werte rechts vom Median. Bei einer ungeraden Anzahl von Werten ist der Median genau der mittlere Wert (z.B. der 11. Wert, wenn es 21 Werte sind), bei einer geraden Anzahl von Werten wird der Mittelwert aus den beiden mittleren Werten genommen. (z.B. der Wert 23,65 als Mittelwert aus 23,6 und 23,7 für die Werte des Jahres 2013).

g) Streuung der Merkmalswerte

Die Spannweite: Die Spannweite ist der Abstand zwischen dem größten und dem kleinsten Wert.

Jahr **(T5)**	größter Wert	kleinster Wert	**Spannweite**
2013	31,4	18,9	**12,5**
2012			
2011			

Quartile und Quartilsabstand:
Der Median teilt Messwerte, die der Größe nach sortiert sind, in zwei gleich große Bereiche. Teilt man diese beiden Bereiche wieder in je zwei Bereiche und bilden man von diesen den Median, so erman drei **Quartile**. Der Abstand zwischen dem ersten und dem dritten Quartil ist ein Maß für die Streuung und wird als **Quartilsabstand** bezeichnet.

Für 2013 ergeben sich folgende Quartile **(T6):**

18,9	19,3	19,6	20,5	**21,2**	**21,4**	22,4	22,4	23,4	23,6	23,7	23,8	25,1	25,5	**25,8**	**26,5**	26,8	27,2	28,1	31,4
unteres Quartil															oberes Quartil				

Q1 = (21,2+21,4)/2 = 21,3 Q3 = (25,8+26,5)/2 = 26,15

Der Quartilsabstand beträgt Qa = 26,15 – 21,3 = 4,85
Der Quartilsabstand ist ein Maß für die **Streuung** der Werte.

Aufgaben
1. Berechnen Sie die beiden fehlenden **arithmetischen Mittel** für 2012 und 2011 in der TabelleT2 !
2. Berechnen Sie die fehlenden Spannweiten in T4 sowie den Median für alle drei Messreihen !
3. Berechnen Sie die fehlenden Quartilsabstände für 2012 und 2011 in T6 !

h) Varianz, Streuung (Standardabweichung), und Variationskoeffizient

In vielen Fällen genügt es nicht, Messergebnisse anhand ihrer Mittelwerte zu beurteilen, sondern es ist wichtig zu wissen, wie weit die einzelnen Messergebnisse voneinander abweichen. Je größer die Abweichung der Messergebnisse, desto größer die **Streuung**.
Wenn es z.B. bei der Produktion eines Bauteiles auf möglichst hohe Präzision ankommt, dann hilft es wenig, wenn der Mittelwert der Messergebnisse einen guten Mittelwert hat. Es kann dennoch sein, das es viele Bauteile gibt, die sowohl nach unten als auch nach oben abweichen, so dass die Produktion nicht akzeptiert werden kann. Zur Bestimmung dieser Streuung eignen sich die oben erwähnten Streumaße.

Die **Varianz** berechnet sich nach folgender Formel:

$$\boxed{v = s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

Die Varianz trägt die Bezeichnung **v** oder **s²**. Die Differenz zwischen Mittelwert und den einzelnen Merkmalswerten wird quadriert und aufsummiert. Die Summe wird anschließend durch n dividiert. (Achtung: Bei der Varianz aus Stichproben wird durch n-1 dividiert.)

Beschreibende Statistik

Hier unsere Tabelle mit der Berechnung der Varianz für die Jahre 2013 und 2012 (**T7**):

Nr	2013	$(x_i - \bar{x})^2$	2012	$(x_i - \bar{x})^2$	Nr	2013	$(x_i - \bar{x})^2$	2012	$(x_i - \bar{x})^2$
1	21,2	6,9	26,3	5,7	11	19,3	20,5	21,8	4,5
2	23,8	0,0	30,3	40,8	12	25,8	3,9	24,1	0,0
3	18,9	24,3	24,3	0,2	13	23,7	0,0	21,3	6,8
4	19,6	17,9	25,2	1,7	14	22,4	2,0	20,1	14,5
5	26,8	8,8	26,1	4,8	15	21,4	5,9	23,8	0,0
6	31,4	57,3	20,5	11,6	16	22,4	2,0	24,3	0,2
7	25,1	1,6	20,9	9,1	17	27,2	11,4	22,0	3,6
8	25,5	2,8	25,8	3,6	18	28,1	18,2	21,5	5,8
9	26,5	7,1	23,7	0,0	19	23,6	0,1	27,6	13,6
10	20,5	11,1	22,9	1,0	20	23,4	0,2	25,7	3,2
					Summen		**202,1**		**130,7**

Als Wert für die Varianz ergibt sich:

für 2013: v = $\frac{202{,}1}{20} = 10{,}105$

für 2012: v = $\frac{130{,}7}{20} = 6{,}535$

Zieht man aus der Varianz der Wurzel so erhält man die **Streuung** (oder Standardabweichung) **s:**

für 2013: s = 3,18

für 2012: s = 2,56

Man sieht, dass die Werte von 2013 eine größere Streuung aufweisen als die Werte von 2012.

<u>Exkurs</u>: Aufbau der Formel: Für die Formel benötigen wir das arithmetische Mittel und berechnen die Abweichung der einzelnen Merkmalswerte vom arithmetischen Mittel. Diese Abweichungen werden aufaddiert und durch die Anzahl der Merkmalswerte geteilt. Dazu ergeben folgende Frage:

Warum werden die Abweichungen vom arithmetischen Mittel noch quadriert?

Durch Quadrieren der Abweichungen werden größere Abweichungen stärker gewichtet als kleine Abweichungen. Dieses sei an einem Beispiel erläutert:

Messreihe I: 4 4 5 6 6 Das arithmetische Mittel ist 5
Messreihe II: 3 5 5 5 7 Das arithmetische Mittel ist ebenfalls 5.

Die Summe der nicht quadrierten absoluten Abweichungen ist in beiden Fällen 4. Dennoch besteht ein Unterschied in der Streuung der beiden Messreihen. Quadriert man die Abweichungen, so erhält man in der Messreihe I die Summe 4 ($1^2+1^2+1^2+1^2$) = 4, für die Messreihe II aber die Summe ($2^2 + 2^2$) = 8. Diese Zahl drückt besser die größere Streuung der Messreihe II aus.

Die Varianz muss nicht unbedingt als Abweichung vom arithmetischen Mittelwert berechnet werden. Es könnte auch die Abweichung von einem Sollwert berechnet werden. Beispiel:

Ein Sack Kartoffeln soll 50 kg wiegen. Probeweise werden fünf Säcke mit folgendem Gewicht gewogen: 47,5 kg, 49 kg, 48 kg, 50,5 kg, 47 kg.
In diesem Fall wäre es nicht sinnvoll, die Abweichungen vom arithmetischen Mittel zu berechnen, sondern hier werden die Abweichungen vom Sollwert 50 kg ermittelt.

Der **Variationskoeffizient** ergibt sich aus dem Verhältnis von Standardabweichung zum arithmetischen Mittel. Der **Variationskoeffizient** wird üblicherweise in Prozent ausgedrückt.

$$\boxed{VarK = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100}$$

für 2013: VarK = $\frac{3{,}18}{23{,}8} \cdot 100 = 13{,}36\ \%$

für 2012: VarK = $\frac{2{,}56}{23{,}9} \cdot 100 = 10{,}71\ \%$

Aufgaben
4. Berechnen Sie Varianz und die Streuung für 2011 aus T4 !
5. Berechnen Sie den Variationskoeffizienten für 2011 aus T4 !

h) Klasseneinteilung und Gruppierung der Daten

Wie oben bereits erwähnt, können die errechneten BMI-Werte folgenden Klassen zugeordnet werden:

unter 20	**Untergewicht**
20 bis unter 25	**Normalgewicht**
25 bis unter 30	**Übergewicht**
ab 30	**starkes Übergewicht**

Daraus ergibt sich folgende neue Tabelle (**T8**):

	2013		**2012**		**2011**	
	absolut	relativ	absolut	relativ	absolut	relativ
unter 20	3	0,15	0	0,00		
20 bis < 25	9	0,45	13	0,65		
25 bis < 30	7	0,35	6	0,30		
30 und mehr	1	0,05	1	0,05		
Summe	20	1,00	20	1,00		

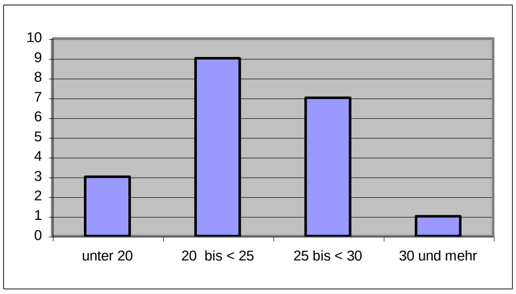
Man unterscheidet **absolute** und **relative** Häufigkeiten. **Absolute Häufigkeiten** ergeben sich aus der Anzahl der Beobachtungen (Messwerte), die zu einer Klasse gehören. **Relative Häufigkeiten** entsprechen dem Anteil der absoluten Zahlen an der Gesamtheit der Messwerte.

Für die Merkmalsausprägung x_i gilt:

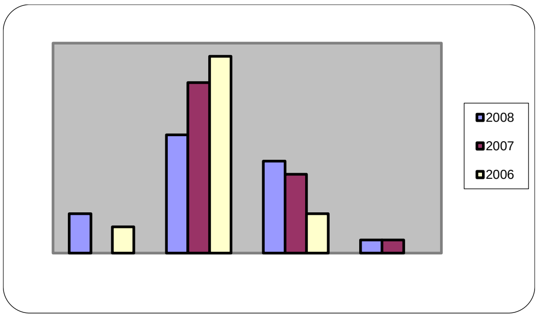
$$\text{Relative Häufigkeit von } x_i = \frac{\text{absolute Häufigkeit von } x_i}{\text{Anzahl der Merkmalsträger}}$$

$$h_i = \frac{n_i}{n} \qquad 0 \le n_i \le n \qquad 0 \le h_i \le 1$$

Ein Säulendiagramm bekommt jetzt wesentlich mehr Aussagekraft.
Je weniger Säulen, desto besser ist die Übersicht.



Der Vergleich der drei Messreihen lässt nun einen leichten Trend erkennen, der sich in einer Zunahme der Gruppe der BMI-Werte über 25 ausdrückt.



Aufgaben

6. Berechnen die fehlenden Häufigkeiten für 2011 in T8 !

Zusammenfassung der Kennwerte

Begriff	Erläuterung
Arithmetisches Mittel	Summe der Merkmalswerte geteilt durch Anzahl der Werte
Gewogenes arithmetische Mittel	Die Merkmalswerte werden in Klassen eingeteilt. Die Summe Mittelwerte der einzelnen Klassen multipliziert mit der Anzahl der Werte der Klasse werden durch die Gesamtzahl aller Merkmalswerte geteilt.
Median	Die kleinsten 50 % der Werte sind kleiner oder gleich dem Median
Modalwert	Der Wert, der am häufigsten vorkommt
Spannweite	Abstand zwischen dem größten und kleinsten Wert
Quartil	Teilt die sortierten Messwerte in vier Gruppen mit je 25 % der Messwerte ein.
Quartilsabstand	Beschreibt die Spannweite der mittleren 50 % der Werte
Varianz	Ein Streumaß, welches die mittlere quadratische Abweichung aller Werte vom arithmetischen Mittel beschreibt
Standardabweichung	Wurzel aus der Varianz
Variationskoeffizient	Verhältnis von Standardabweichung zum arithmetischen Mittel ausgedrückt in Prozent.

6. Aufgaben (Einsatz von Excel ist empfehlenswert)

a) Es liegen folgende Messdaten vor:
155, 159, 164, 165, 165, 167, 169, 170, 172, 175, 177, 177, 179, 180, 188

Ermitteln Sie den Median, Modalwert und arithmetischen Mittel sowie Spannweite und Quartilsabstand.

b) Es liegen folgende Messdaten vor: 18, 19, 21, 11, 20, 26, 30, 19, 18, 12, 14, 17

Ermitteln Sie den Median, Modalwert und arithmetischen Mittel sowie Spannweite und Quartilsabstand.

c) Gegeben sind die Ergebnisse einer Klausur mit den folgenden Punktzahlen der Studenten:
72, 74, 80, 75, 81, 90, 100, 94, 80, 71, 76, 79, 80, 82, 83, 81, 84, 83, 50, 48, 59, 37, 44, 80, 77, 62, 85, 76, 51, 57, 63, 45, 91, 83, 96, 59, 66, 72, 83, 69, 64, 85, 48,.

Bilden Sie Klassen mit einer Breite von 5 und ordnen Sie die Ergebnisse durch eine Strichliste den Klassen zu. Berechnen Sie die absoluten und relativen Häufigkeiten für die Klassen und stellen Sie das Ergebnis graphisch dar.
Berechnen Sie den arithmetischen Mittelwert.

d) In zwei Parallelklassen wurden folgende Noten erzielt:

Klasse A

Note	1	2	3	4	5	6
Anzahl	2	5	10	5	2	1

Klasse B

Note	1	2	3	4	5	6
Anzahl	3	7	7	4	3	-

Berechnen Sie das arithmetische Mittel, die Standardabweichung und den Variationskoeffizienten für beide Klassen und beurteilen Sie das Ergebnis beider Klassen.

e) Erläutern Sie die folgende Formel mit Worten: $\sum_{i=1}^{n} x_i = n \cdot \bar{x}_i$

f) Zwei Kampfrichtergruppen von je 8 Personen messen die Zeit eines 100 Meter Sprinters mit Handstoppuhren.

	1	2	3	4	5	6	7	8
Gruppe A	11,02	10,89	11,11	11,04	10,97	10,91	10,99	11,05
Gruppe B	10,82	10,98	11,21	11,03	10,98	10,88	11,00	11,04

Aufgabe

Vergleichen Sie die beiden Kampfrichtergruppen bezüglich des arithmetischen Mittels und der Varianz. Welche der beiden Gruppen liefert die besseren Ergebnisse?

Begriffe und Merksätze

Wichtige Merksätze

Bruchrechnen	
Satz 1	Brüche können nur addiert oder subtrahiert werden, wenn die Nenner gleich sind.
Satz 2	Brüche werden multipliziert, indem man die Zähler multipliziert und die Nenner beibehält.
Satz 3	Durch einen Bruch wird dividiert, indem man mit dem Kehrwert des Bruches multipliziert.
Satz 4	Ein Bruch wird mit einer Zahl multipliziert, indem man den Zähler mit der Zahl multipliziert und den Nenner beibehält. Man kann auch den Nenner durch die Zahl dividieren.
Satz 5	Ein Bruch wird mit durch eine Zahl dividiert, indem man den Zähler durch die Zahl dividiert oder den Nenner mit der Zahl multipliziert.
Satz 6	Kürzen von Brüchen bedeutet, dass sowohl der Zähler als auch der Nenner durch denselben Term (dieselbe Zahl) dividiert wird.
Satz 7	Erweitern von Brüchen bedeutet, dass Zähler und Nenner mit demselben Term (derselben Zahl) multipliziert wird.
Satz 8	Brüche können nur gekürzt werden, wenn im Zähler und im Nenner jeweils ein Produkt oder ein einzelner Term steht. Denn: *Differenzen oder Summen kürzen nur die Dummen*.

Potenzrechnen		
Regel 1	$\mathbf{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$	Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert.
Regel 2	$\mathbf{a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m}$	Potenzen mit gleichen Exponenten werden multipliziert, indem man die Exponenten mit dem Produkt der Basis potenziert.
Regel 3	$\mathbf{a^m : a^n = a^{m-n}}$	Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man die Exponenten subtrahiert.
Regel 4	$\mathbf{a^m : b^m = (a : b)^m}$	Potenzen mit gleichen Exponenten werden dividiert, indem man die Exponenten mit dem Quotient der Basis potenziert.
Regel 5	$\mathbf{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$	Potenzen werden potenziert, indem man die Exponenten multipliziert..
Regel 6	$\mathbf{a^0 = 1}$	Potenzen mit dem Exponent 0 haben immer den Wert 1

Sonstige Regeln	
1	Eine **Division durch Null** ist nicht möglich. Das bedeutet, dass der Nenner eines Bruches niemals den Wert 0 haben darf. Im Taschenrechner wird eine Division durch Null als **Error** angezeigt
2	Aus einer negativen Zahl kann man keine Wurzel ziehen.
3	Ein Produkt, das aus mehreren Faktoren besteht, hat immer den Wert Null, wenn einer der Faktoren den Wert Null hat. **Satz vom Nullprodukt**.

Begriffe und Merksätze

Wichtige Begriffe, die im Skript verwendet werden

Begriff	Erläuterung
Asymptote	Ein Graph, der sich der Funktionsgraph einer Funktion immer mehr nähert, wenn die x-Werte ins Unendlich gehen.
Definitionsbereich	Bezeichnet alle x-Werte, die in eine Funktionsgleichung eingesetzt werden dürfen.
Differentialquotient	Ergibt sich aus dem Differenzenquotienten, wenn der Abstand zwischen den beiden x-Werten, der durch Δx ausgedrückt wird, unendlich klein wird (h →0).
Differenzenquotient	Das Steigungsmaß m, welches durch den Quotienten $\frac{\Delta Y}{\Delta x}$ ausgedrückt wird.
Extremwert	Ein Hoch- oder Tiefpunkt. Auch Maximum oder Minimum genannt.
Funktion	Eine Zuordnung, bei der zu jedem x-Wert eindeutig ein y-Wert (Funktionswert) gehört.
Funktionswert	Der Wert, der sich ergibt, wenn ein x-Wert in eine Funktionsgleichung eingesetzt wird.
Hyperbel	Der Funktionsgraph einer gebrochen rationalen Funktion. Dieser kann im Gegensatz zu Parabeln aus mehreren Teilen (Parabeläste) bestehen.
Intervall	Ein Intervall ist ein Bereich von Werten, der von einem Anfangswert bis zu einem Endwert reicht.
Lücke	Bei gebrochen rationalen Funktionen versteht man unter eine Lücke ein Loch im Graphen, für den kein Funktionswert existiert, weil die Funktion an dieser Stelle nicht definiert ist.
Nullstelle	Die Stelle, an der ein Graph die x-Achse schneidet, oder der x-Wert, für den sich eine Funktionswert von Null ergibt.
Orthogonale	Eine Gerade, die im rechten Winkel zu einer anderen Geraden steht.
Parabel	Meist werden nur die Funktionsgraphen von quadratischen Funktionen als Parabeln bezeichnet. Aber auch die Funktionsgraphen höherer Ordnung sind Parabeln.
Passante	Eine Gerade, die einen Funktionsgraph weder schneidet noch berührt.
Pol	Die gedachte Linie, an die sich der Graph einer gebrochen rationalen Funktion annähert, wenn sich die x-Werte immer mehr an eine nicht definierte Stelle annähern.
Scheitelpunkt	Der Hoch- oder Tiefpunkt einer quadratischen Funktion.
Sekante	Eine Gerade, die eine Kurve an mindestens zwei Stellen schneidet.
Steigung	Das Verhältnis zwischen Höhenunterschied und der horizontalen Entfernung zweier Punkte.
Tangente	Eine Gerade, die eine Kurve an einer Stelle nur berührt, ohne sie zu schneiden.
Wertebereich	Gibt den Bereich aller Werte an, die als Funktionswerte möglich sind.

Begriffe und Merksätze

Symbole

Symbol	Erläuterung
∞	**Unendlich**. Dies ist keine Zahl, da es dafür keinen Wert gibt. In der Mathematik wird dieses Symbol häufig als Grenzwert verwendet, wenn gezeigt werden soll, dass x-Werte immer größer werden und über alle Grenzen wachsen
lim	**Limes** (lat. = Grenze). Das Symbol dafür, wenn sich ein Wert einer Grenze nähert, ohne sie jedoch genau zu erreichen.
$\lvert\ \rvert$	**Betrag**. Von Zahlen, die innerhalb der beiden senkrechten Striche stehen, werden die absoluten Werte betrachtet. D. h. der Wert der Zahl ohne Vorzeichen. Beispiel: $\lvert -1 \rvert = 1$ aber auch $\lvert 2 \rvert = 2$.
[ ]	**Intervall**. Innerhalb der beiden eckigen Klammern stehen oft zwei Zahlen, die einen Bereich angeben, der untersucht werden soll. Beispiel: [2;5] bezeichnet den Bereich von 2 bis 5. Dabei sind die Intervallgrenzen 2 und 5 mit einbezogen.
Δ	**Delta**. Das Symbol für den griechischen Buchstaben Delta beschreibt in der Mathematik den Abstand zwischen zwei Werten. Man verwendet das Symbol z. B. bei der Berechnung der Steigung, wobei Δy die Differenz zweier y-Werte ist und Δx die Differenz zweier x-Werte.
$\int$	**Integral**. In der Integralrechnung das Symbol für Fläche.
!	**Fakultät.** Das Produkt aller Zahlen von 1 bis n. Z. B. 3 ! = 1 x 2 x 3 = 6
Σ	**Summe**. Die Summe aller Zahlen, für die das Summenzeichen gilt.
$\overline{x}$	**Arithmetische Mittel**. Der Durchschnitt aller Zahlen. Summe der Zahlen dividiert durch die Anzahl.

Erstellt von: Jochen Pellatz, Dipl. Ök., Dipl. Hdl., Lehrer für Mathematik, Programmierung und Wirtschaftslehre an der Max-Weber-Schule in Gießen.
Weitere Informationen und Skripten zum Download auf ***www.pellatz.de***

Webseite pellatz.de

Mathematiksript